

Iterácie

Dominik Rigasz

Úvod

Pozrieme sa na úlohy, v ktorých vystupujú funkcie (alebo všeobecnejšie nejaké procesy) vnožené samé do seba veľakrát. Takéto funkcie budeme interpretovať ako orientované grafy, kde každé aplikovanie funkcie je vlastne posun po jednej hrane. Budeme sa pozeráť na štruktúru tohto orientovaného grafu (cykly, (nekonečné) cesty,...), čo nám niečo povie o pôvodnej funkcii.

Základné pojmy a pozorovania

Definícia 1. Nech f je funkcia. Pre prirodzené n budeme značiť

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-krát}}(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{n\text{-krát}},$$

teda f aplikované n -krát na x , a pre $n = 0$ dodefinujeme $f^0(x) = x$. Keby sme náhodou chceli zapísať n -tú mocninu hodnoty $f(x)$, napíšeme $(f(x))^n$.

S funkciou $f : M \rightarrow M$ budeme zaobchádzať ako s orientovaným grafom na množine vrcholov M . Šípka z a do b povedie práve vtedy, keď $f(a) = b$. Následne budeme pre takú funkciu používať grafovo motivované termíny:

- **Cyklom** nazveme konečnú postupnosť vrcholov, medzi ktorými dookola vedú šípky. Cyklus dĺžky 1 je *pevný bod*, teda prvok, ktorý sa zobrazuje sám na seba.
- **Reťazou** nazveme postupnosť navzájom rôznych vrcholov spojených postupne šípkami, ktorá je v smere šípek nekonečná. Pokiaľ je reťaz nekonečná aj proti smeru šípek, nazveme ju *obojsmernou reťazou*.
- **Cestou** z vrcholu budeme rozumieť postupnosť vrcholov, na ktoré sa dostaneme, keď jednoducho pôjdeme po šípkach, čo zodpovedá opakovanému aplikovaniu funkcie na príslušný prvok. Cesta sa môže buď zacykliť, alebo môže byť reťazou.

Užitočné pozorovania

- Funkciám $f : M \rightarrow M$ zodpovedajú práve tie grafy na množine vrcholov M , kde z každého vrcholu vychádza práve jedna šípka.
- Pre funkciu na konečnej množine sa cesta z ľubovoľného vrcholu zacyklí.
- Nech x leží v cykle dĺžky k na funkcii f . Potom $f^n(x) = x$ práve vtedy, keď $k \mid n$.

- Funkcia uvažovaná ako graf je:
 - **prostá** (injektívna), keď do každého vrcholu vedie najviac jedna šípka,
 - **na** (surjektívna), keď do každého vrcholu vedie aspoň jedna šípka,
 - **bijektívna**, keď do každého vrcholu vedie práve jedna šípka.
- Nech M je konečná množina. Potom je funkcia $f : M \rightarrow M$ prostá práve vtedy, keď je na.
- Bijekcia pozostáva len z navzájom disjunktných cyklov a obojstranných reťazí.
- Prostá funkcia pozostáva len z navzájom disjunktných cyklov, jednostranných reťazí a obojstranných reťazí. Počiatočné vrcholy jednostranných reťazí sú pritom presne tie prvky, ktoré chýbajú v obore hodnôt.

Úlohy s iteráciami dokážu byť dosť rôznorodé a okrem vyššie uvedených pozorovaní nemáme veľmi silnejšie zbrane. Časté postupy a nástroje zahŕňajú:

- **Prostosť a bijektivita:** Pokiaľ dokážeme, že je funkcia prostá či bijektívna, značne to zjednoduší obrázok. Následne už možno zvlášť pracovať s cyklami a reťazami.
- **Extremálny princíp:** Na cykloch sa môže oplatíť pozrieť sa na najväčší alebo najmenší prvok. Rovnako tak môže niekedy pomôcť minimálny prvok oboru hodnôt. Všeobecnejšie má každá podmnožina $\mathbb{N}$ minimum.
- **Poradie a vzdialenosť:** Hodí sa uvažovať o poradí a vzdialenostiach prvkov na reťazi. Niekedy sa tiež hodí porovnať to s pozíciami na číselnej osi.
- **Indukcia:** Iterácie často stretáme nad prirodzenými číslami. Indukovať potom môžeme obyčajne podľa argumentu, alebo napríklad podľa poradia v cykle či na reťazi.
- **Funkcionáľkové triky:** Funkcionáľka s iteráciou je stále funkcionáľka. Múdre dosadenie, úprava alebo symetria môžu úlohu sprehľadniť.

Prechádzky (úvod do cyklov)

Cvičenie 1 (PraSe 35-4j-5). Krivoš na svojich cestách zabľúdl do krajiny, kde je konečne veľa ciest, každá z nich začína a končí križovatkou a každá križovatka je tvaru Y. (Cesty môžu byť kľukaté a mimoúrovňovo sa krížiť.) Povedal si, že by si ju rád prezrel, ale trochu sa obával, aby sa tam úplne nestratil. Naplánoval si to tak, že vyrazí z križovatky pri krčme „Na mýtinke“ a striedavo bude na križovatkách odbočovať doľava a doprava. Môže si byť istý tým, že sa po nejakom čase ocitne opäť pri krčme „Na mýtinke“? **Hinty:** 1

Cvičenie 2 (PraSe 35-1p-4). V každom poschodí nekonečne vysokej začarovanej veže sa nachádza magický portál, na ktorom je napísané prirodzené číslo. Tieto prirodzené čísla tvoria nerastúcu postupnosť a zároveň každé číslo udáva, do koľkého poschodia príslušný portál vedie. Medzi poschodiami veže možno cestovať len pomocou portálov a každý portál je iba jednosmerný. V jednom z poschodí si malá myška zmyslela, že sa vydá na výzvedy, a začala putovať cez portály. Ukážte, že za nejakú dobu zostane uväznená vo dvojici poschodí, prípadne dokonca len v jedinom. **Hinty:** 2

Cvičenie 3 (PraSe 34-1j-6). Mesto má tvar obdĺžnika. Jeho hlavné ulice sú úsečky rovnobežné s niektorým jeho okrajom (stranou obdĺžnika) a rozdeľujú ho na obdĺžnikové štvrté. Centrom nazveme takú štvrť, ktorá nesusedí s okrajom. Podľa vyhlášky žiadna hlavná ulica nevedie naprieč celým mestom. Dokážte, že mesto má centrum. **Hinty:** 3

Cvičenie 4. Na tabuli sú v nejakom poradí napísané čísla 1 až 2023 v rade. V jednom kroku sa pozrieme na prvé číslo, nech je to k , a obrátíme poradie prvých k čísel – teda $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ prepíšeme na $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1$. Dokážte, že po konečnom počte krokov dostaneme na prvú pozíciu jednotku. **Hinty:** 4

Cvičenie 5. Nech F_n sú Fibonnaciho čísla, kde $F_1 = F_2 = 1$, a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre všetky $n \geq 1$. Ukážte, že pre každé $d \in \mathbb{N}$ existuje nekonečne veľa n takých, že $d \mid F_n + 1$. **Hinty:** 5

Iterujeme len trochu (funkcie)

Cvičenie 6 (PraSe 36-4p-2). Rozhodnite, či existuje funkcia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taká, že $f(f(n)) < f(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. **Hinty:** 6

Cvičenie 7 (Zovšeobecnené PraSe 37-4p-3). Je daná funkcia $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Skonstruujte $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takú, že $f^n(x) = 0$ má presne $g(n)$ riešení pre každé $n \in \mathbb{N}$. **Hinty:** 7

Cvičenie 8. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ktoré pre všetky $n \in \mathbb{N}$ spĺňajú

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

Hinty: 8

Cvičenie 9 (USAYNO). Rozhodnite, či existuje funkcia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ spĺňajúca $f(f(n)) = 3n$ pre všetky $n \in \mathbb{Z}$. **Hinty:** 9

Cykly

Cvičenie 10 (Baltic Way 2024). Daná je konečná (neprázdna) množina S . Povieme, že funkcia $f : S \rightarrow S$ je n -tá mocnina, ak existuje funkcia $g : S \rightarrow S$ taká, že $f(x) = g^n(x)$ pre všetky $x \in S$. Ukážte, že ak $f : S \rightarrow S$ je n -tou mocninou pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak potom $f(f(x)) = f(x)$ pre všetky $x \in S$. **Hinty:** 10

Cvičenie 11 (Israel TST). Nájdite všetky polynómy $P \in \mathbb{Z}[X]$ také, že pre všetky $x \in \mathbb{Z}$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n \mid P^n(x) - x.$$

Hinty: 11

Cvičenie 12 (ELMO SL 2018). Je daná bijekcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Musí nutne existovať nekonečne veľa funkcií $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takých, že $f(g(x)) = g(f(x))$ pre každé $x \in \mathbb{R}$? **Hinty:** 12

Cvičenie 13 (Rumunsko 2004). Nájdite všetky bijekcie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ktoré spĺňajú

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$. **Hinty:** 13

Cvičenie 14 (USAMO 2019). Funkcia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spĺňa

$$f^{f(n)}(n) = \frac{n^2}{f(f(n))}$$

pre každé $n \in \mathbb{N}$. Určte všetky možné hodnoty $f(2020)$. **Hinty:** 14

Cvičenie 15 (PraSe 36-4p-7). Nech $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Funkcia $f : S \rightarrow S$ je *krutoprisna*, pokiaľ pre každé $k \in S$ platí $f^{f(k)}(k) = k$. Dokážte, že každá krutoprisna funkcia má aspoň $P + 1$ pevných bodov, kde P je počet prvočísel v intervale $(\sqrt{n}, n)$. **Hinty:** 15

Cvičenie 16 (Russia TST 2020). O reálnom polynóme $f(x) = x^2 + ax - 1$ je známe, že rovnica $f^{47}(x) = x$ má aspoň 50 reálnych riešení. Dokážte, že táto rovnica má aspoň 96 riešení. **Hinty:** 16

Cvičenie 17 (ELMO SL 2014). Funkciu $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nazveme *žúžovou*, pokiaľ

$$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = n$$

pre každé $n \in \mathbb{N}$. Nájdite všetky m také, že každá žúžová funkcia spĺňa $f^{2014}(m) = m$. **Hinty:** 17

Reťaze

Cvičenie 18. Sú dané $a, k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že funkcia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spĺňajúca $f^k(n) = n + a$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje práve vtedy, keď $k \mid a$. **Hinty:** 18

Cvičenie 19 (MEMO 2020 T1). Nájdite všetky prirodzené k , pre ktoré existujú funkcie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ také, že g nadobúda nekonečne veľa hodnôt a $f^{g(n)}(n) = f(n) + k$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. **Hinty:** 19

Cvičenie 20 (ELMO 2020). Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ také, že pre ľubovoľné $x, y, z \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1.$$

Hinty: 20

Cvičenie 21 (ISL 2013). Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, ktoré spĺňajú $f(f(f(n))) = f(n + 1) + 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$. **Hinty:** 21

Hinty

1. Ako stavy Krivošovej cesty ber napríklad trojice (cesta, smer, parita).
2. Každá cesta sa zacyklí – pozri sa na cyklus.
3. Rozmysli si, že v meste neexistujú zákruty, ktoré zároveň nie sú križovatky. Potom sa skús prechádzať vnútri mesta.
4. Pozri sa na cyklus a urob extrémnu voľbu.
5. Modulo d sa zacyklíš. Musíš od začiatku? Aké členy sú pred F_1, F_2 ?
6. Pozri sa na cestu z ľubovoľného n .
7. Proste si nakresli stromček.

8. Nahliadni prostosť a potom indukuj.
9. Skús si tipnúť.
10. Stačí nájsť nejaké N také, že pre ľubovoľnú funkciu $g : S \rightarrow S$ máme $g^{2N} = g^N$. Aké N by mohlo vyhovovať? Po koľkých aplikovaniach g sa určite dostaneme do cyklu? Ak už sme v cykle, koľkokrát musíme aplikovať g aby sme sa vrátili na to isté miesto v cykle?
11. Nech $P(x) - x$ je nekonštantný polynóm. Potom existuje nekonečne veľa prvočísel $p \mid P(n) - n$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$. Ak sa pozeráme na P ako funkciu v $\mathbb{Z}_p$, ako musí vyzeráť?
12. Rozdeľ komponenty súvislosti na obojstranné reťaze, pevné body a ostatné cykly.
13. Obojstranné reťaze vysporuj, v cykloch urob extrémálnu voľbu.
14. Rozmysli si, že f musí byť poskladaná z dvojcyklov a pevných bodov.
15. Dĺžky cyklov.
16. Koľko je cyklov dĺžok 1 a 47?
17. Rozmysli si bijektivitu. Vnútri cyklu indukuj proti smeru šípok.
18. Koľko prvkov sa s každou aplikáciou f stráca z oboru hodnôt?
19. Cesta z $f(n)$ navštívi skoro celú zvyškovú triedu $f(n) \pmod k$. Buď nájdi spor s neobmedzenosťou g , alebo skús vhodne poskladať graf.
20. Reťaz z 1 musí obsahovať všetko. S pomocou úlohy 15 si rozmysli $1 \mapsto 2 \mapsto 3$ a je vyhraté.
21. Porovnaj f^4 na argumentoch n a $n - 1$, vyjde to pekne. Následne porovnávaj, koľko prvkov chýba v oboroch hodnôt f a f^3 . Potom si už stačí rozmyslieť poradie prvých štyroch prvkov na reťazi – sú dve možnosti, ktoré fungujú.

Literatúra a zdroje

Táto prednáška je (s malými zmenami) prebraná od Mateja Doležálka, ktorý ju prednášal na jarnom sústreďení PraSe v Mrtníku, 2023. Týmto mu ďakujem.

1. Matej Doležálek: Iterace, Mrtník, 2023.
2. Martin „Vodka“ Vodička: Funkcionálky nad prirodzenými číslami, zborník iKS, 2017.
3. Radovan Švarc: Dvě neobvyklé existenční techniky, Hojsova Stráž, 2016.