

# Invarianty

Denys Andrukhovskiy  
[denys.andrukhovskiy@trojsten.sk](mailto:denys.andrukhovskiy@trojsten.sk)

Tieto úlohy boli ukradnuté u Michala Staníka (LŠM 2024, [1]), Jozefa Rajníka (Kvalifikácia 2025-26, [2]), Mira Psoty (IKSko [3]), KMS zbierky [4] a ďalších zdrojov [5, 6].

Hlavné triky: ofarbovanie mriežky, algebraické výrazy, zvysky, rohy a hrany útvarov plus plocha či obsah, inverzie (kladivo pre permutácie: počet dvojíc  $(i, j)$  kde  $i$  je pred  $j$  a  $i > j$ ).

**Cvičenie 1** (KMS zbierka). Na tabuli sú napísané čísla  $1, 2, 3, \dots, n$ , každé práve raz. Keď sa Kubo veľmi nudí, zotrie nejaké dve čísla z tabule a napíše na ňu absolútnu hodnotu ich rozdielu. Nakoniec zostane na tabuli len jediné číslo. Určite paritu čísla, ktoré zostane nakoniec.

**Hinty:** 1

**Cvičenie 2** (KMS zbierka). Na tabuli sú napísané prirodzené čísla od 1 do  $10^6$ , každé práve raz. Každé číslo zotrieme, na jeho miesto napíšeme jeho ciferný súčet. Tento proces opakujeme kým nezostanú len jednociferné čísla. Ktorých cifier bude na záver na tabuli najviac? **Hinty:**

2

**Cvičenie 3.** Vo vrcholoch šesťuholníka sú čísla  $0, 0, 0, 1, 0, 1$  v tomto poradí. V jednom kroku môžeme zvýšiť dve susedné o 1. Dokážte, že nemôžeme dostať stav, kedy budú všetky čísla rovnaké. **Hinty:** 3

**Cvičenie 4.** Na tabuli sú napísané prirodzené čísla od 1 do  $10^3$ , každé práve raz. V jednom kroku môžeme zotrieť ľubovoľné dve čísla  $a$  and  $b$  a napísať na tabuľu  $ab + a + b$ . Ktoré čísla môžeme dostať na konci? **Hinty:** 4

**Cvičenie 5.** Niekoľko mincí je uložených na nekonečný štvorčekovaný pás široký 1 štvorček. Pokiaľ existuje štvorček, na ktorom sú ešte aspoň dve mince, môžeme zobrať dve mince a jednu posunúť doľava a druhú doprava. Je možné sa po konečnom počte ťahov dostať naspäť do začiatkovej pozície?

**Cvičenie 6.** Majme sekvenciu  $1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5, \dots$ , kde od siedmeho člena je každý člen rovný poslednej cifre súčtu predchádzajúcich šiestich. Dokážte, že sa tam nemôže vyskytovať šesticca  $0, 1, 0, 1, 0, 1$ .

**Cvičenie 7** (Internet: Math Stackexchange question 2585483). Nasledujúce operácie sú prípustné pre kvadratický polynóm  $p(x) = ax^2 + bx + c$ :

1. vymeniť  $a$  a  $c$ ;
2. Prepísať  $x$  za  $x + t$  pre ľubovoľné reálne  $t$ , a roznasobiť zátvorky (tak, aby opäť dostať polynóm vo forme  $a'x^2 + b'x + c'$ ).

Vieme opakovaním týchto operácií transformovať polynóm  $x^2 - x - 2$  na polynóm  $x^2 - x - 1$ ?

**Hinty:** 5

**Cvičenie 8** (KMS 2003/4 Z1). Na ostrove v Tichomorí žijú chameleóny 3 farieb: žlté, zelené a hnedé. Keď sa stretnú dva chameleóny rôznych farieb, oba sa prefarbia na tretiu farbu. V istom momente bolo na ostrove 13 žltých, 15 zelených a 17 hnedých chameleónov. Je možné, aby bolo po istom čase všetkých 45 chameleónov rovnakej farby? (Predpokladáme, že sa žiaden nový nenarodí, ani žiaden neumrie.) **Hinty:** 6

**Cvičenie 9.** Nájdite počet vydláždení šachovnice  $10 \times 10$  dlaždicami  $1 \times 4$  a  $4 \times 1$ . **Hinty:** 7

**Cvičenie 10** (KMS 2015/16 Z2). Na každom políčku štvorčekovej siete  $n \times n$  je zhasnutá lampa. V jednom ťahu vieme zvoliť ľubovoľných  $k$  za sebou idúcich lúčok v riadku alebo stĺpci a prepnúť ich. V závislosti od kladných celých čísel  $n, k$  určte, či je možné takýmito ťahmi zasvietiť všetky lampy. **Hinty:** 8

**Cvičenie 11** (KMS 2005/6 Z3). Okolo ohňa sedí  $n + 1$  psov ( $n \geq 1$ ). Jeden z nich je bankár a má  $n$  kariet, ostatní nemajú ani jednu kartu. V jednom kroku zvolíme dvoch psov  $A$  a  $B$  (nie nutne rôznych), z ktorých každý má aspoň jednu kartu a spolu majú aspoň dve. Zoberieme jednu kartu od psa  $A$  a dáme ju jednému zo susedov psa  $B$  a zoberieme jednu kartu od psa  $B$  a dáme ju jednému zo susedov psa  $A$ . Pre ktoré  $n$  sa po sérii vhodných krokov môžeme dostať do situácie, že každý pes okrem bankára má jednu kartu? **Hinty:** 9

**Cvičenie 12** (KMS 2005/6 L3). Máme šachovnicu s rozmermi  $3 \times 3$ . V dolných rohoch sú dva červené kone, v horných rohoch sú dva modré kone. Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že dva červené kone budú v horných rohoch a dva modré kone budú v dolných rohoch? Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že po diagonálach (uhlopriečkach) budú oproti sebe kone rovnakej farby? *Poznámka: kone skáču do L, dva kone nemôžu byť naraz na jednom políčku; nemusíme striedať ťahy červenými a modrými koňmi.* **Hinty:** 10

**Cvičenie 13** (KMS 2003/4 L1). Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále dolava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice  $8 \times 8$ . Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz? **Hinty:** 11

**Cvičenie 14.** V tabuľke  $4 \times 4$  môžeme presúvať štvorčeky na voľné miesto. Môžeme tak z konfigurácie naľavo dostať konfiguráciu napravo?

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 |    |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 |    |

**Cvičenie 15** (KMS 2005/6 L1). Rasto sa hrá s tabuľkou  $6 \times 6$ , ktorá má v každom políčku zopár kamienkov. V jednom kroku hry si vyberie niekoľko políčok tabuľky tvoriacich štvorec so stranou väčšou ako 1 a do každého políčka tohto štvorca pridá jeden kamienok. Rasto vyhrá vtedy, keď sa mu podarí dosiahnuť v každom políčku tabuľky počet kamienkov deliteľný tromi. Má šancu vyhrať pre každé počiatočné rozmiestnenie kamienkov v tabuľke? **Hinty:** 12

**Cvičenie 16** (KMS 2002/3 Z1). Na šachovnicu  $10 \times 10$  umiestnime 9 pukov tak, aby bol každý puk na inom políčku. Potom pridávame puky podľa nasledujúceho pravidla: ak má políčko, na ktorom nie je puk, aspoň dve susedné políčka, na ktorých už sú puky, tak na toto políčko dáme puk. (Susedné políčka majú spoločnú stranu.) Ukážte, že týmito krokmi nikdy nezaplníme celú šachovnicu pukmi. **Hinty:** 13

**Cvičenie 17** (KMS 2002/03 Z1). Petra a Dalila sa najnovšie nehrajú so zápalkami, ale s peniazmi, ktoré ušetria tým, že si nekupujú zápalky. Zoberú si  $n$  korunáčiek a umiestnia ich na stole do jedného radu. Dievča, ktoré je na ťahu, si vyberie jednu mincu, ktorá je znakom hore, otočí ju, ako aj všetky ostatné napravo od nej. Potom je na ťahu druhé dievča. Takto striedavo ťahajú, pričom začína skúsenejšia Petra. Prehrá tá, ktorá už nevie spraviť ťah. Ukážte, že táto hra vždy skončí po konečnom počte krokov. Ktorá hráčka má víťaznú stratégiu? **Hinty:** [14](#)

## Hinty

- Počet párnych a nepárnych.
- Modulo 9.
- Parita.
- Čo vám pripomína  $ab + a + b$ ? Vieme nejakú peknú algebraickú identitu?
  - $ab + a + b + 1 - 1 = (a + 1)(b + 1) - 1$ .
  - Skúste namiesto čísel sa pozeráť na ich nástupcov.
- Skúste nájsť vhodný algebraický výraz.
  - Je to známy výraz pre kvadratické polynómy :-).
- Rozdiely
  - Modulo 3
- Farbovanie
  - Modulo 4.
- Dalo by sa použiť myšlienky riešenia predchádzajúcej úlohy?
  - Skúste zafarbiť pomocou  $k$  farieb plochu.
  - Zratakajte jednotlivé farby, a zamyslite sa nad paritou.
- Počet kartičiek na nepárnych indexoch.
- Keby bol len jeden kôň, akými spôsobmi môže skákať?
- Systém súradníc.
  - Súradnice modulo 3.
  - Zratakajte počet štvorcov podľa invariantu vyššie pre cestu a pre reálnu šachovnicu.
- Skúste nájsť také také štvorčeky, pre ktoré sa dá zmeniť zvyšok bez toho, aby menil zvyšky na ostatných políčkach. Pozrite sa na zvyšné štvorčeky.
  - Skúste nájsť vhodný *rozdiel* vecí (zrejme modulo 3).
- Aká vlastnosť nerastie, keď pridáme puk?
  - Skúste sa pozrieť na geometrické vlastnosti.
  - Obvod.
- Sú dva spôsoby: pozrieť sa na mince ako na cifry, alebo zobrať vážený súčet.