

Eulerova priamka

Michal Ilkovič

1 Teória

Definícia 1 (Rovnoľahlosť). Rovnoľahlosť (homotétia) so stredom S a koeficientom $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je zobrazenie, ktoré každému bodu X roviny priradí bod X' taký, že platí:

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$$

Bod S sa nazýva stred rovnoľahlosti a číslo k koeficient rovnoľahlosti. Ak $X = S$, potom $X' = S$ (stred je samodružný bod).

Dôsledok 0.1. Pre zobrazenie rovnoľahlosti platia nasledujúce vlastnosti:

1. **Rovnobežnosť úsečiek:** Obrazom každej úsečky AB je úsečka $A'B'$, ktorá je s pôvodnou úsečkou rovnobežná ($AB \parallel A'B'$).
2. **Zmena dĺžky:** Dĺžka obrazu úsečky je daná vzťahom $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.
3. **Zachovanie uhlov:** Rovnoľahlosť je podobné zobrazenie, preto zachováva veľkosti uhlov.
4. **Obrazy priamok:** Priamka, ktorá neprechádza stredom S , sa zobrazí na priamku s ňou rovnobežnú. Priamka prechádzajúca stredom S sa zobrazí sama na seba.

Veta 1. V ľubovoľnom trojuholníku je Eulerova priamka priamkou, ktorá prechádza ortocentrom H , ťažiskom G , stredom opísanej kružnice O a stredom kružnice deviatich bodov (Feuerbachovej) N . Medzi týmito bodmi platia určité fixné poradia $OGNH$ a pomery vzdialeností:

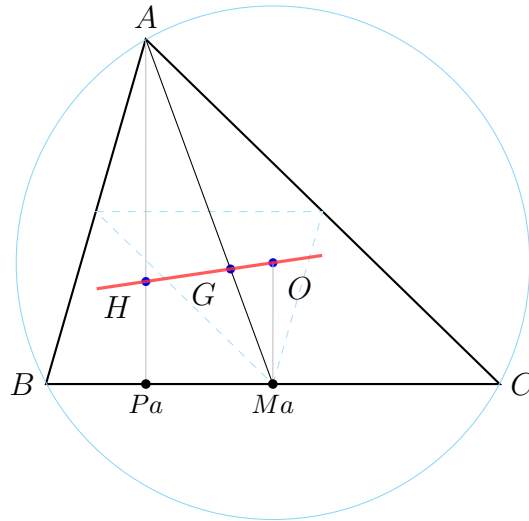
$$OG : GN : NH = 2 : 1 : 3$$

.

Dôkaz. Dôkaz rozdelíme na dve časti s využitím vlastností rovnoľahlosti.

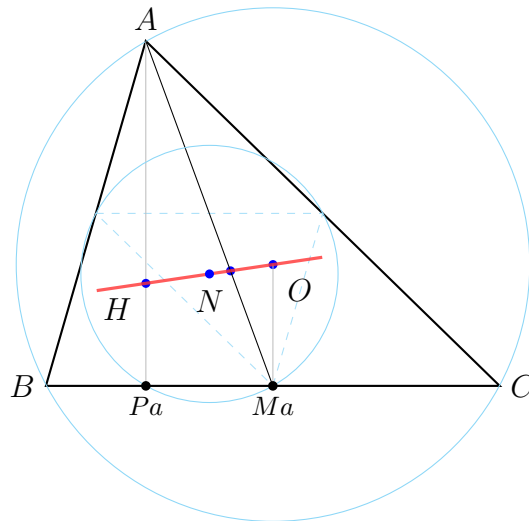
1. Dôkaz pre body O, G, H : Uvažujme $\triangle ABC$. Nech M_a je stred strany BC . Ťažnica spájajúca vrchol A so stredom M_a obsahuje ťažisko G , pričom platí známy pomer $|AG| : |GM_a| = 2 : 1$. Uvažujme rovnoľahlosť h so stredom v ťažisku G a koeficientom $k = -1/2$. Táto rovnoľahlosť zobrazuje vrchol A do stredy strany M_a (pretože G leží na ťažnici a $|GM_a| = \frac{1}{2}|GA|$). Podobne vrcholy B a C do stredov protiľahlých strán M_b a M_c . $\triangle ABC$ sa teda zobrazí na $\triangle M_a M_b M_c$ (priekový trojuholník). Vieme, že:

1. Ortocentrum H trojuholníka ABC je priesčníkom jeho výšok.
2. Stred opísanej kružnice O trojuholníka ABC je priesčníkom osí strán, čo sú zároveň výšky priečkového trojuholníka $M_a M_b M_c$.



Keďže rovnoľahlosť h zobrazuje trojuholník ABC na $M_aM_bM_c$, musí zobraziť aj ortocentrum prvého na ortocentrum druhého. Teda $h(H) = O$. Z definície rovnoľahlosti so stredom G vyplýva a koeficientom $-1/2$, že body H, G, O musia ležať na jednej priamke a platí $|HG| = 2|GO|$

2. Dôkaz pre stred kružnice deviatich bodov N : Kružnica deviatich bodov (Feuerbachova kružnica) je opísaná kružnica priecťového trojuholníka $M_aM_bM_c$. Vieme, že rovnoľahlosť $h(G, -1/2)$ zobrazuje opísanú kružnicu trojuholníka ABC (so stredom O) na opísanú kružnicu priecťového trojuholníka (so stredom N). Keďže už vieme, že G, N, O ležia na jednej priamke, zostáva určiť polohu N voči H . Z toho $OG : GN = 2 : 1$ a spojením s prvou časťou $OG : GN : NH = 2 : 1 : 3$.



□

Cvičenie 1. H je ortocentrum $\triangle ABC$, O je stred kružnice opísanej a r je polomer kružnice opísanej. Dokážte, že platí $|OH| < 3r$.

Cvičenie 2. (Hamilton's theorem) H je ortocentrum $\triangle ABC$. Dokážte, že Feuerbachove kružnice $\triangle ABC, \triangle ABH, \triangle ACH, \triangle BCH$ splyvajú a ich Eulerove priamky sa pretínajú v jednom bode.

2 Príklady

Úloha 1. Majme $\triangle ABC$ s ortocentrom H . Body O_A, O_B, O_C sú postupne stredy kružníc opísaných $\triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$. Dokážte, že kružnice opísané $\triangle ABC$ a $\triangle O_AO_BO_C$ majú

rovnaký polomer. **Hinty:**1

Úloha 2. (BAMO 2005). Dokážte, že ak dve ťažnice v trojuholníku majú rovnakú dĺžku, potom je tento trojuholník rovnoramenný. **Hinty:**2

Úloha 3. Body dotyku kružnice vpísanej $\triangle ABC$ (so stredom v I) so stranami BC, CA, AB označme postupne D, E, F . Označme ortocentrum $\triangle DEF$ ako V . Stred kružnice opísanej $\triangle ABC$ je O . Dokážte, že I, V, O leží na priamke. **Hinty:**3

Úloha 4. Máme zadnú kružnicu k a bod A na nej. Potom ešte máme zadaný bod H niekde vnútri kružnice. Skonstruujte $\triangle ABC$ tak, aby H bolo jeho ortocentrum a k kružnica opísaná. **Hinty:**45

Úloha 5. ABC je trojuholník s ortocentrom H . P je bod na kružnici opísanej (rôzny od vrcholov). BE je výška s päťou v E . Q je priesečník priamky prechádzajúcej A rovnobežnej s PB priamky prechádzajúcej B rovnobežnej s AP . R je priesečník priamky prechádzajúcej A rovnobežnej s PC a priamky prechádzajúcej C rovnobežnej s PA . Priamky HR a AQ sa pretínajú v X . Ukáž, že EX je rovnobežné s AP . **Hinty:**6

(ISL 1996)

Hinty

1. Využite poznatky z cvičenia 2. N je stred stredovej súmernosti, čo zobrazí body A, B, C na O_A, O_B, O_C .
2. H musí tiež ležať na osi jednej strany.
3. Skúste nájsť stred rovnoláhlosti, ktorá zobrazí $\triangle DEF$ na trojuholník zo Švrčkových bodov.
4. Vieme skonstruovať Feuerbachovu kružnicu?
5. Päta výšky leží na Feuerbachovej kružnici.
6. Uvažujte ortocentra trojuholníkov ABC, PBC . Pomocou vhodného posunutia dokážte, že H je ortocentrum AQR , takže HXA je pravý. Ďalej doúhlite.

Literatúra a zdroje

1. Prednáška od Jakuba Löwita
2. Google Gemini