

Diskrétna spojitosť

Dominik Rigasz

Úvod

Matematická analýza nás učí, že spojitá funkcia na uzavretom intervale nadobúda všetky medzihodnoty. Podobný – o niečo jednoduchší – koncept platí aj pri diskretných veličinách (teda takých, ktoré popisujú nejaké stavy/postupnosti), a často sa mu hovorí diskretná spojitosť. Ak máme diskretnú veličinu, ktorá príliš neskáče a zároveň nadobúda malé a aj veľké hodnoty, tak potom musí nadobúdať aj nejaké hodnoty v strede.

Veľmi časté napríklad je, že máme veličinu $V(n)$, ktorá dosahuje iba celočíselné hodnoty, a zistíme o nej napríklad, že $V(n+1) \leq V(n) + 1$. Potom ak pre nejaké kladné celé čísla a, b máme $V(a) < V(b)$, tak V musí dosahovať všetky (celočíselné) hodnoty na $[V(a), V(b)]$.

Túto techniku islutrujeme na úlohe:

Úloha 1 (motivačná). Na rovinnej lúke sa pasie 2023 bodových prasiatok. Pastier Krivoš sa dopočul, že sa k lúke blíži vlk, ktorý chce prasiatka zožrať. Samozrejme chce prasiatka zachrániť, a preto by okolo nich rád postavil kruhovú ohradu. Zároveň by si však rád naklonil šťastenu na svoju stranu, preto by chcel nechať práve 42 prasiatok mimo ohrádky, a tým urobiť obeť bohom. Ukážte, že Krivoš takú ohrádku skutočne vie postaviť.

Riešenie. Najprv ukážeme, že existuje bod B , na ktorom nestojí žiadne prasiatko a ktorý zároveň nemá k žiadnym dvom prasiatkam rovnakú vzdialenosť. To vyplýva z toho, že ak má bod k dvom prasiatkam rovnakú vzdialenosť, potom leží na osi úsečky, ktorá ich spája. Tým máme ale zakázaný len konečný počet (konkrétne $\binom{2023}{2}$) priamok a konečný počet bodov, čo nám určite nepokryje celú rovinu. Preto bod B s požadovanými vlastnosťami vskutku existuje.

Teraz, keď sme hotoví s technikálami, prejdeme na skutočné použitie diskkrétnej spojitosti. Uvažujme kružnicu k_1 so stredom v B , ktorá neobsahuje žiadne prasiatko (tá existuje – jednoducho zvolíme polomer menší, než je vzdialenosť B k najbližšiemu prasiatku). Postupne ju nafukujme, kým všetky prasiatka neležia vnútri kružnice. Na začiatku sa mimo kružnice páslo $2023 > 42$ prasiatok, na konci je to $0 < 42$. Pretože pri nafukovaní naraz pridáme vždy len jedno prasiatko (pretože B nemá k žiadnym dvom prasiatkam rovnakú vzdialenosť), musí raz určite nastať taká situácia, kedy sa práve 42 prasiatok nachádza mimo ohrádky.

Základné úlohy

Cvičenie 1 (PraSe 37-1j-1). Dánsko a Anglicko spolu hrali futbal. Dánsky tím dal celkom osem gólov, zatiaľ čo anglický päť. Musel počas stretnutia existovať okamih, kedy sa počet gólov, ktoré už Anglicko dalo, rovnal počtu gólov, ktoré Dánsko ešte len dá? **Hinty:** 1

Cvičenie 2 (PraSe 33-1j-5). E.T. k narodeninám dostal krásnu kruhovú tortu a hneď sa rozhodol polkruhovú časť z nej venovať najlepšiemu riešiteľovi KMSKa. Než ju ale stihol odkrojiť, Pepa už tortu nakrájal tradičným spôsobom (teda na kruhové výseky) na práve $4k$ dielikov tak, že $2k$ z nich bolo väčších (navzájom rovnakých) a $2k$ menších (tiež navzájom rovnakých). Dokážte, že E.T. aj tak našiel niekoľko susedných dielikov, ktoré tvorili polkruh.

Hinty: 2

Diskrétna spojitosť

Cvičenie 3 (Taliansko 2013). V obojstranne nekonečnom rade stoja slobodomurári a mafiáni. Je známe, že v ľubovoľnom úseku niekoľkých vedľa seba stojacich ľudí sa počet slobodomurárov a mafiánov líši nanajvýš o 1000. Dokážte, že v nejakom úseku 2000 ľudí stojí presne 1000 slobodomurárov a 1000 mafiánov. **Hinty:** 3

Cvičenie 4. Nekonečná postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa, že $a_1 = 1$ a pre ľubovoľné prirodzené i je rozdiel $a_{i+1} - a_i$ rovný 0 alebo 1. Ak viete, že pre isté n platí $a_n = \frac{n}{1000}$, dokážte, že existuje m spĺňajúce $a_m = \frac{m}{500}$. **Hinty:** 4

Cvičenie 5. Každá zo stien ôsmich jednotkových kociek je ofarbená na modro alebo na červeno, pričom celkovo je modrých stien rovnako veľa ako červených. Dokážte, že kocky možno zložiť do jednej kocky $2 \times 2 \times 2$, na ktorej povrchu bude modrá farba zaberáť rovnakú plochu ako červená. **Hinty:** 5

Cvičenie 6 (PraSe 30-1p-4). Ukážte, že existuje 1000 po sebe idúcich prirodzených čísel, medzi ktorými je práve 5 prvočísel. **Hinty:** 6

Cvičenie 7 (Srbsko 2014). Prirodzené číslo n nazveme *budovateľské*, pokiaľ sa dá zapísať v tvare $n = a^b + b$ pre prirodzené čísla $a, b > 1$. Dokážte, že existuje úsek 2014 po sebe idúcich prirodzených čísel s presne x budovateľskými číslami pre ľubovoľné $x \in \{0, 1, \dots, 2014\}$. **Hinty:** 7

Cvičenie 8 (IMO 2014). Je daná rastúca postupnosť prirodzených čísel $a_0, a_1, \dots$. Dokážte, že existuje práve jedno prirodzené $n \geq 1$ spĺňajúce

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Hinty: 8

Cvičenie 9 (PROMYS Europe 2024 Admission Test). Určte všetky kladné celé čísla n , pre ktoré v súradnicovej sústave existuje kružnica, ktorá má v svojom vnútri práve n mrežových bodov. (Mrežovými bodmi myslíme body, ktorých obe súradnice sú celočíselné.) **Hinty:** 9

Cvičenie 10 (IMO 1996). Sú dané prirodzené čísla p, q, n , kde $p + q < n$, a $(n + 1)$ -tica čísel $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, pre ktorú platí:

(i) $x_0 = x_n = 0$.

(ii) Pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $x_i - x_{i-1}$ buď p , alebo $-q$.

Dokážte, že existujú indexy $i < j$ s $(i, j) \neq (0, n)$, pre ktoré platí $x_i = x_j$. **Hinty:** 10

Záľudnejšie úlohy (kombinácia techník)

Cvičenie 11 (PraSe 38-1p-7). V každom vrchole pravidelného 2018-uholníka sedel ráno jeden termit. Títo termity boli v nejakom poradí označení číslami 1 až 2018 (každé číslo bolo použité). Jediné, čo termity vedia, je vymeniť si miesto so svojim susedom. Večer sa každý termit nachádzal vo vrchole naproti tomu, v ktorom začínal. Dokážte, že sa niekedy v priebehu dňa prehodili dvaja termity so súčtom čísel 2019. **Hinty:** 11

Cvičenie 12 (ťažšia, PraSe 40-4j-5b). Máme n červených a n modrých kariet, na každej z nich je nejaké číslo od 1 do n (čísla sa môžu opakovať). Je vždy možné vybrať niekoľko modrých a niekoľko červených kariet tak, aby mali modrá a červená skupinka rovnaký súčet? **Hinty:** 12

Cvičenie 13 (PraSe 39-1j-5). Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takú, že $a_0 = 0$. Ďalšie členy definujme nasledovne. Pre prirodzené číslo n označme l_n najväčšie nepárne číslo, ktoré delí n . Potom položíme $a_n = a_{n-1} + 1$, pokiaľ l_n dáva po delení štyrmi zvyšok 1, a $a_n = a_{n-1} - 1$, pokiaľ dáva zvyšok 3. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje nekonečne veľa i takých, že $a_i = m$. **Hinty:** 13

Cvičenie 14 (Čína 2020). Nech $p(n)$ pre prirodzené číslo $n > 1$ značí najväčšie prvočíslo, ktoré delí n . Nekonečná postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa $a_1 > 1$ a rekurenciu $a_{i+1} = a_i + p(a_i)$. Dokážte, že v postupnosti $\{a_i\}$ sa vyskytuje štvorec (druhá mocnina). **Hinty:** 14

Cvičenie 15. V rovine je daných n modrých a n červených bodov, pričom žiadne tri farebné body neležia na jednej priamke. Dokážte, že možno nakresliť n úsečiek spájajúcich modrý a červený bod tak, že žiadne dve nebudú mať spoločný bod (ani koncový). **Hinty:** 15

Na záver uvádzam zábavnú úlohu – alebo skôr hádanku – z knihy "The Art and Craft of Problem Solving", ktorá sa tiež v istom zmysle týka spojitosti (avšak možno nie až tak diskkrétnej):

Cvičenie 16 (folklór). Šošo ide na túru do Tatier. O 8:00 ráno vyrazí zo Štrbského plesa, a na Kôprovský štít dorazí 16:00 poobede. Noc prespí na štíte, a druhý deň ráno 8:00 začne svoj zostup. Ide presne po tej istej trati ako deň predtým, a na Štrbské pleso dorazí presne o 16:00 poobede. Ukážte, že existuje čas medzi 8:00 a 16:00, kedy Šošo bol v oba dni na tom istom mieste na trati. (Všimnime si, že nerobíme žiadne predpoklady o Šošovej rýchlosti. Prvý deň mohol ísť miernym tempom, a druhý deň najprv miernym tempom, potom zistil, že na štíte si niečo zabudol tak sa vrátil, a potom šprintoval do cieľa aby dorazil 16:00...) **Hinty:** 16

Hinty

1. Pozeraj sa na $A + D$ ako funkciu času. A a D sú to, čo by tak človek čakal.
2. Posúvaj zvolenú $2k$ -ticu dielikov a sleduj počet menších, ktoré sú zvolené.
3. Keby úloha neplatila, skonštruujes dlhhočizný úsek s väčšou prevahou jedného druhu ľudí, než je povolené.
4. Uvážte $f(k) = 500a_k - k$.
5. Najprv zlož kocky ľubovoľne, potom ich otáčaj, aby si dosiahol(a) opačnú (ne)rovnováhu modrej a červenej farby na povrchu.
6. Na začiatku číselnej osi je prvočísel veľa. Skonštruuj úsek, kde je ich fakt málo.

7. Odhadni, koľko budovateľských čísel menších než z môže existovať.
8. Čo možno povedať o postupnosti $d_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n - na_n$?
9. Úloha s prasiatkami a ohradou.
10. BUNV ber $\text{NSD}(p, q) = 1$ a sleduj počty skokov o p v úsekoch dĺžky $p + q$.
11. Doplnkoví termity, ktorí sa neprehodili museli mať rovnakú cestu.
12. Nakresli si tabuľku $(n + 1) \times (n + 1)$ a zanes do nej súčty čiastočných súčtov modrých a červených kariet. Rozparcelovaním tabuľky na šupky tvaru L okolo jedného rohu spolu s diskretnou spojitosťou a Dirichletom nájdi dve políčka s rovnakým číslom.
13. Odvoď a_{2n} na základe a_n . Z toho potom nahliadni, že postupnosť neobmedzene porastie a nekonečne často sa vráti do 1.
14. Ukáž, že postupnosť $b_n = \frac{a_n}{p(a_n)}$ je neobmedzená. Potom si môžeš zvoliť nejaké šikové číslo, ktoré by mala trafiť.
15. Vedel by si úlohu vyriešiť pre $n = 2$? Vedel by si tento postup iteratívne opakovať? Nájdi monovariant.
16. Druhý deň pošleme Štepiho o 8:00 ráno zo Štrbského plesa na Kôprovský štít, pričom Štepi pôjde presne tak isto ako išiel Šošo prvý deň. Títo dvaja sa niekde na trati stretnú.

Literatúra a zdroje

Táto prednáška je (s malými zmenami) prebraná od Mateja Doležálka, ktorý ju prednášal na jarňom sústreďení PraSe v Mrtníku, 2023. Týmto mu ďakujem.

1. Matej Doležálek: Diskrétní spojitosť, Mrtník, 2023.
2. Radovan Švarc: Dvě neobvyklé existenční techniky, Hojsova Stráž, 2016.
3. <https://artofproblemsolving.com/community>.