

Ťažisková geometria

Michal Ilkovič

1 Úvod

Ak bodom v rovine (alebo v priestore $\mathbb{R}^n$) priradíme nejakú "hmotnosť" $m \in \mathbb{R}$ (kľudne aj zápornú), vieme využívať ťažisko týchto bodov na hľadanie rôznych pomerov úsečiek a dokazovanie, že sa úsečky pretínajú v jednom bode.

Vieme, že ak je celková hmotnosť sústavy bodov m_S nenulová, tak existuje práve jeden bod T_S , nazývaný ťažisko sústavy, pre ktorý platí rovnica, ktorú budeme nazývať **prvý centrálny moment**:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{T_S A_i} = 0. \quad (1)$$

Dôkaz jednoznačnosti ťažiska

Predtavme si, že existuje taký bod T , ktorý spĺňa podmienku (1). Vyjadríme vektory $\overrightarrow{T A_i}$ pomocou ľubovoľného pevne zvoleného bodu O (začiatok súradnicovej sústavy). Použijeme vzťah pre rozdiel vektorov:

$$\overrightarrow{T A_i} = \overrightarrow{O A_i} - \overrightarrow{O T}$$

Z toho rozbitím na dve sumy a ďalšími úpravami:

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{T A_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{O A_i} - \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{O T} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{O A_i} - \overrightarrow{O T} \sum_{i=1}^n m_i = 0$$

Vieme, že $\sum_{i=1}^n m_i = M$. Po dosadení a následnej úprave dostávame:

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{O A_i} = M \cdot \overrightarrow{O T}$$

Keďže predpokladáme $M \neq 0$, môžeme jednoznačne vyjadriť polohový vektor hľadaného bodu T :

$$\overrightarrow{O T} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{O A_i}$$

Keďže všetky kroky boli ekvivalentné, tento výsledok dokazuje, že pre ľubovoľnú sústavu hmotných bodov s nenulovou celkovou hmotnosťou existuje práve jeden bod T , ktorý spĺňa definíciu ťažiska.

Poloha ťažiska dvoch bodov na ich spojnici

Dokážme pomocou zložiek, že ťažisko dvoch bodov $(A; m_a)$ a $(B; m_b)$ leží na ich spoločnej priamke. Nech $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$. Súradnice ťažiska $T_{AB} = [t_1, t_2]$ splňajú:

$$m_a(a_1 - t_1) + m_b(b_1 - t_1) = 0 \implies t_1 = \frac{m_a a_1 + m_b b_1}{m_a + m_b}.$$

Analogicky pre druhú zložku $t_2 = \frac{m_a a_2 + m_b b_2}{m_a + m_b}$. Vektorovo môžeme zapísať $T_{AB} = A + \frac{m_b}{m_a + m_b}(B - A)$. Keďže vektor $T_{AB} - A$ je násobkom vektora $B - A$, bod T_{AB} leží na priamke AB . Ak $m_a, m_b > 0$, platí navyše vzťah $m_a \cdot a = m_b \cdot b$, kde a, b sú vzdialenosti ťažiska od bodov A, B .

Vlastnosti a aplikácia na trojuholník

Ak v sústave bodov nahradíme hociakú podsústavu bodov P bodom $(T_P; m_P)$, tak sa nám ťažisko celej sústavy nezmení. Analogicky vieme jeden bod $(A; m_a)$ rozštiepiť na podsústavu. V trojuholníku ABC ťažisko nájdeme nahradením A, B ich ťažiskom T_{AB} s hmotnosťou $m_a + m_b$. Ťažisko T_S leží na úsečke CT_{AB} . Analogicky musí ležať aj na AT_{BC} a BT_{AC} , preto sa všetky tri úsečky pretínajú v jednom bode T_S .

2 Úlohy

Úloha 1. Dokáž, že sa ťažnice v trojuholníku pretínajú v jednom bode a sú rozdelené ťažiskom v pomere 2 : 1.

Riešenie. Priradíme bodom A, B, C hmotnosti $m_a = m_b = m_c = 1$. Ťažiská dvojíc sú v stredoch strán. Ťažisko celej sústavy T_S leží na CT_{AB} . Ak nahradíme A, B bodom $(T_{AB}; 2)$, ťažisko T_S delí CT_{AB} v pomere $m_{T_{AB}} : m_c = 2 : 1$.

Úloha 2. V $\triangle ABC$ sú na stranách AC, BC body D, E tak, že $|AD| : |CD| = 4 : 3$ a $|BE| : |CE| = 2 : 5$. $F = AE \cap BD$. Nájdí súčet pomerov $|AF| : |EF|$ a $|BF| : |DF|$.

Riešenie. Zvolíme $m_a = 3, m_c = 4$ (aby D bolo ťažisko AC). Zo strany BC určíme $m_b = 10$ (pomer $m_c : m_b = 2 : 5 \implies 4 : 10$). Bod F je ťažisko sústavy. F delí AE v pomere $(m_b + m_c) : m_a = 14 : 3$ a BD v pomere $(m_a + m_c) : m_b = 7 : 10$. Hľadaný súčet je $\frac{14}{3} + \frac{10}{7} = \frac{128}{21}$.

Úloha 3. Majme $\triangle ABC$, D je stred BC a E je stred AD . $F = BE \cap AC$. Nájdí $|AF| : |CF|$.

Riešenie. Chceme, aby E bolo ťažisko sústavy. Zvolíme $m_b = 1, m_c = 1 \implies D$ je ťažisko BC s $m_d = 2$. Aby E bolo stredom AD , musí $m_a = m_d = 2$. Pomer $|AF| : |CF| = m_c : m_a = 1 : 2$.

Úloha 4. Majme obdĺžnik $ABCD$. M je stred BC , $N \in AB$ tak, že $|AN| : |BN| = 1 : 4$. $S = BD \cap CN$, $R = DM \cap CN$. Nájdí $NS : SR : RC$.

Riešenie. V $\triangle ABC$ pri $m_a = 4, m_b = 1, m_c = 4$ je S ťažisko, $|NS| : |SC| = 4 : 5$. V $\triangle BCD$ pri $m_b = 10, m_c = 10, m_d = 8$ je R ťažisko, $|SR| : |RC| = 5 : 9$. Skombinovaním: $|NS| : |SR| : |RC| = 56 : 25 : 45$.

Úloha 5. Majme trojuholník ABC . Na stranách AB, BC a AC sa postupne nachádzajú body D, E a F tak, že $|AD| : |DB| = 3 : 7$, $|BE| : |EC| = 2 : 5$ a $|AF| : |FC| = 4 : 3$. Označme G priesečník úsečiek EF a CD . Nájdí pomer úsečiek $|FG| : |GE|$.

Riešenie. V tejto úlohe musíme využiť trik štiepenia bodov. Potrebujeme rozštiepiť bod C na dve časti tak, aby sme jednu časť C_1 mohli spojiť s bodom A a druhú časť C_2 mohli spojiť s bodom B . Iba vtedy budeme schopní využiť úsečku FE pri hľadaní ťažiska sústavy. Ľahko

overíme, že pre hmotnosti $m_a = 21, m_b = 9, m_{c1} = 28, m_{c2} = \frac{18}{5}$ sú všetky body D, E, F ťažiskami jednotlivých dvojíc bodov AB, BC_2, AC_1 . Z toho vyplýva, že bod G je ťažiskom celej tejto sústavy. Vieme teda využiť hmotnosť bodov F a E na zistenie hľadaného pomeru:

$$|FG| : |GE| = m_e : m_f = \frac{63}{5} : 49 = 63 : 245$$

3 Ďalšie úlohy

Úloha 6. Vo všeobecnom trojuholníku ABC sú postupne na stranách BC, AC, AB body D, E, F tak, že delia stranu vždy v pomere $2 : 1$. Vyjadrite pomer obsahov trojuholníka ABC a trojuholníka vymedzeného spojnicami AD, BE, CF .

(MATBOJ 2025)

Úloha 7. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AA', BB', CC' , ktoré sa pretínajú v bode H . Navyše platí $AH/HA' = 1$ a $BH/HB' = 2$. Určite CH/HC' .

(NÁBOJ 2011)

Úloha 8. Dané sú tri body A, B a C , ktoré neležia na jednej priamke. Úsečka AB je rozdelená na tri rovnako dlhé časti bodmi D a E . Bod F je stredom úsečky AC . Priamky EF a BF pretínajú priamku CD v poradí v bodoch G a H . Ak obsah $\triangle DEG$ je 18, tak aký je obsah trojuholníka $\triangle FGH$?

(NÁBOJ 2014)

Úloha 9. Majme trojuholník ABC . Na strane AC je bod D a os uhla BAC pretína úsečku BD v bode X a úsečku BC v bode Y tak, že platí $AX : XY = 3 : 1$ a $BX : XD = 5 : 3$. Určte veľkosť uhla ACB pomocou veľkosti uhla BAC .

(STROM 48.2.1)

Literatúra a zdroje

1. Prednáška od Miloša Mičíka KMS beta 2023 leto
2. Google Gemini