

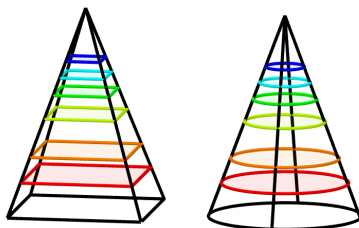
Cavalieriho princíp

Lukáš Gáborik

Cvičenie 1. Majme štvorec a rovnobežník, ktorých jedna strana má dĺžku a . Čo musia splňať, aby aj ich obsahy boli rovnaké? Sú vtedy aj ich obvody rovnaké?

Veta 1 (2D Cavalieriho princíp). *Zoberme si dva útvary A, B a priamku p v rovine. Ak pre každú priamku $q \parallel p$ platí, že „dĺžky“ rezov útvarov A, B priamkou q sa rovnajú, rovnajú sa aj ich obsahy.*

Veta 2 (3D Cavalieriho princíp). *Zoberme si dve telesá A, B a rovinu ϱ v priestore. Ak pre každú rovinu $\sigma \parallel \varrho$ platí, že „obsahy“ rezov telies A, B rovinou σ sa rovnajú, rovnajú sa aj ich objemy.*



Cvičenie 2. Pre viaceré telesá vzorec na výpočet objemu obsahuje činiteľ $1/3$. Vieme kocku rozdeliť na nejaké tri telesá? **Hinty:** 1

Vďaka tomuto vieme zovšeobecniť vzorec pre ľubovoľné „špicaté“ teleso.

Ešte by sme chceli spočítať objem gule. Na prvý pohľad nevidíme, s čím by sa guľa dala cez Cavalieriho princíp porovnať.

Cvičenie 3. Určte, aké obsahy majú rezy gule. Potom sa zamyslite, či vieme na základe toho dostať objem gule z objemu nám už známych objektov. **Hinty:** 2 3

Úloha 1. Dokážte analogickým spôsobom objemy guľovej vrstvy, guľového odseku a guľového výseku. Pre kontrolu uvádzame aj tabuľku vzorcov.

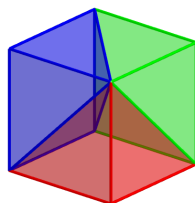
teleso	objem cez v, R	objem cez v, ϱ
vrstva	$\frac{\pi v}{3}(3R^2 - v^2)$	$\frac{\pi v}{3}(3\varrho^2 + 2v^2)$
odsek	$\frac{\pi v^2}{3}(3R - v)$	$\frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2)$
výsek	$\frac{2\pi R^2 v}{3}$	$\frac{\pi}{6v}(\varrho^4 + 2\varrho^2 v^2 + v^4)$

Cvičenie 4. Určte zo znalosti obsahu kružnice obsah elipsy. **Hinty:** 4

Cvičenie 5. Naformulujte analógiu Cavalieriho princípu pre povrchy a overte, či platí. **Hinty:**

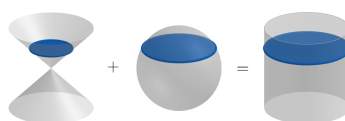
Hinty

1.



2. Obsah rezu gule je zapísaný ako rozdiel. Vieme pre menšenia aj menšiteľa nájsť nám známe teleso s prislúchajúcimi rezmi?

3.



4. Z rovníc kružnice a elipsy určte dĺžky rezov v jednotlivých výškach a dajte si ich do pomeru.

5. Pomerne jednoduchý kontrapríklad je kocka a skosená kocka.