

Hry

Jakub Skaloš

Definícia 1. Vyhrávajúca pozícia stav hry, v ktorom viem urobiť taký ťah, aby nech súper spraví čokoľvek počas jeho ťahu, na ďalší svoj ťah sa znova ocitnem vo víťaznej pozícii, alebo skončím hru ako víťaz.

Definícia 2. Prehrávajúca pozícia stav hry, v ktorom bez ohľadu na to, čo spravím, buď priamo prehrám, alebo súper ma opäť vie dostať do prehrávajúcej pozície.

Definícia 3. Vyhrávajúca stratégia je spôsob, akým mám hrať, aby ja som sa udržal len vo vyhrávajúcich pozíciách.

Úloha 1. Ajka a Bebe hrajú kartovú hru s balíčkom 32 kariet. Začína Ajka, potom sa hráči na ťahu striedajú. V jednom ťahu môže hráč z balíčka zobrať jednu kartu alebo prvočíselný počet kariet. Prehráva ten, kto nemôže urobiť ťah. Ktorý z hráčov má v tejto hre víťaznú stratégiu? Popíšte ju.

Riešenie. Keď si nakreslíme tabuľku prípadov, zistíme, že násobky 4-ky sú prehrávajúce stavy.

Úloha 2. Dvaja hráči majú pred sebou dve kôpky; je jednej je 6 a na druhej 9 zápalkiek. Hráč, ktorý je na ťahu, odoberie z jednej, z druhej, alebo z oboch kôpok zároveň dokopy najviac 3 zápalky. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku. Vieme niektorému z hráčov (začínajúci, druhý) nájsť víťaznú stratégiu?

Riešenie. V skutočnosti to je rovnaký prípad, ako kebyže máme na začiatku jednu kôpku s 15 zápalkami (*Prečo?*). Ak prvý vezme na začiatku 3 ľubovoľné zápalky, potom bez ohľadu na to, čo spraví súper, vie až do konca hry zabezpečiť, aby počet zápalok bol deliteľný 4 po každom ďalšom jeho ťahu. To znamená, že prvý každý ďalší ťah vezme $a_i = 4 - a_{i-1}$. To mu zabezpečí víťazstvo, pretože po jeho 4. ťahu ostane zápalok 0, čiže musel počas neho vziať aj poslednú zápalku.

Čísla sú malé, počas riešenia by bolo fajn spraviť 2D tabuľku vysokú 6, širokú 9. V nej si zaznačovať od konca, ak si na ťahu v tomto stave, či vyhrávaš alebo nie.

Úloha 3. Hráči majú pred sebou jednu kôpku s 1000 zápalkami. Začínajúci hráč môže odoberať jednu alebo štyri zápalky, druhý môže odoberať dve alebo tri zápalky (ak by chceli použiť ťah, ale nie je naň v kôpke dosť zápalkiek, môžu zobrať aj všetky zostávajúce). Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku.

Riešenie.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2.	✓	✓	✓	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Obr. 1: Tabuľka (prvý riadok sú ťahy hráča 1, druhý hráča 2)

Tu sa črtá jednoduchá víťazná stratégia pre hráča 1: ak je zápaliek 4 alebo menej, berie všetko. Ale ak je ich 5 a viac, berie po 1. Takto hráča 2 nikdy nedostane do jeho víťazných pozícií (1,2,3). Keďže táto stratégia nikdy neprehrá a remíza v tejto hre neexistuje, stratégia musí byť víťazná.

Úloha 4.

$$\begin{array}{c}
 * = * \\
 * + * = * \\
 * + * + * = * \\
 \vdots \\
 * + * + * + * + * + * + * = *
 \end{array}$$

My a súper striedavo dopĺňame celé čísla namiesto hviezdíčiek. Začíname my. Zistite, či môžeme zabezpečiť, aby po poslednom ťahu boli všetky rovnosti pravdivé.

Riešenie. Čo sa stane, ak nikdy nezoberieme predposlednú v riadku? Vieme zakaždým umiestnením poslednej hviezdíčky v riadku zabezpečiť korektnosť rovnice?

Početom prebytkových hviezdíčiek si označíme súčet hviezdíčiek mínus dva v každom riadku. Máme takúto stratégiu:

- prvý krok: vezmeme z riadku, kde je aspoň jedna prebytková.
- ostatné kroky, ak súper krok predtým zobral prebytkovú: vezmeme aj my nejakú
- ostatné kroky, ak súper krok predtým zobral predposlednú z riadka: vezmeme z toho riadka aj poslednú

Prečo funguje? Na to aby nám to súper vedel prekaziť musíme my zobrať predposlednú v riadku a súper poslednú. Vie nás donútiť? Nie, lebo počet prebytkových bude vždy párny po našom kole, čiže ak súper vie zobrať prebytkovú, veme aj my, a nevie tak zobral predposlednú a my vieme poslednú.

Úloha 5. Hráči majú pred sebou dve kôpky po 1000 zápaliek. Hráč, ktorý je na ťahu, môže odobrať najviac štyri zápalky z prvej kôpky, alebo najviac päť zápaliek z druhej kôpky, ale vždy aspoň jednu zápalku. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku

Hand-drawn game board for a 1001x1001 game. The board is a 10x10 grid of 100 cells. The vertical axis is labeled 'Počet 1' (Count 1) with values 0 to 9. The horizontal axis is labeled 'Počet 2' (Count 2) with values 0 to 9. The grid contains 'x' and 'v' marks. A large 'x' is at (0,0). A large 'v' is at (0,1). A large 'x' is at (1,0). A large 'v' is at (1,1). A large 'x' is at (2,0). A large 'v' is at (2,1). A large 'x' is at (3,0). A large 'v' is at (3,1). A large 'x' is at (4,0). A large 'v' is at (4,1). A large 'x' is at (5,0). A large 'v' is at (5,1). A large 'x' is at (6,0). A large 'v' is at (6,1). A large 'x' is at (7,0). A large 'v' is at (7,1). A large 'x' is at (8,0). A large 'v' is at (8,1). A large 'x' is at (9,0). A large 'v' is at (9,1). A large 'x' is at (0,9). A large 'v' is at (0,8). A large 'x' is at (0,7). A large 'v' is at (0,6). A large 'x' is at (0,5). A large 'v' is at (0,4). A large 'x' is at (0,3). A large 'v' is at (0,2). A large 'x' is at (0,1). A large 'v' is at (0,0). A large 'x' is at (1,9). A large 'v' is at (1,8). A large 'x' is at (1,7). A large 'v' is at (1,6). A large 'x' is at (1,5). A large 'v' is at (1,4). A large 'x' is at (1,3). A large 'v' is at (1,2). A large 'x' is at (1,1). A large 'v' is at (1,0). A large 'x' is at (2,9). A large 'v' is at (2,8). A large 'x' is at (2,7). A large 'v' is at (2,6). A large 'x' is at (2,5). A large 'v' is at (2,4). A large 'x' is at (2,3). A large 'v' is at (2,2). A large 'x' is at (2,1). A large 'v' is at (2,0). A large 'x' is at (3,9). A large 'v' is at (3,8). A large 'x' is at (3,7). A large 'v' is at (3,6). A large 'x' is at (3,5). A large 'v' is at (3,4). A large 'x' is at (3,3). A large 'v' is at (3,2). A large 'x' is at (3,1). A large 'v' is at (3,0). A large 'x' is at (4,9). A large 'v' is at (4,8). A large 'x' is at (4,7). A large 'v' is at (4,6). A large 'x' is at (4,5). A large 'v' is at (4,4). A large 'x' is at (4,3). A large 'v' is at (4,2). A large 'x' is at (4,1). A large 'v' is at (4,0). A large 'x' is at (5,9). A large 'v' is at (5,8). A large 'x' is at (5,7). A large 'v' is at (5,6). A large 'x' is at (5,5). A large 'v' is at (5,4). A large 'x' is at (5,3). A large 'v' is at (5,2). A large 'x' is at (5,1). A large 'v' is at (5,0). A large 'x' is at (6,9). A large 'v' is at (6,8). A large 'x' is at (6,7). A large 'v' is at (6,6). A large 'x' is at (6,5). A large 'v' is at (6,4). A large 'x' is at (6,3). A large 'v' is at (6,2). A large 'x' is at (6,1). A large 'v' is at (6,0). A large 'x' is at (7,9). A large 'v' is at (7,8). A large 'x' is at (7,7). A large 'v' is at (7,6). A large 'x' is at (7,5). A large 'v' is at (7,4). A large 'x' is at (7,3). A large 'v' is at (7,2). A large 'x' is at (7,1). A large 'v' is at (7,0). A large 'x' is at (8,9). A large 'v' is at (8,8). A large 'x' is at (8,7). A large 'v' is at (8,6). A large 'x' is at (8,5). A large 'v' is at (8,4). A large 'x' is at (8,3). A large 'v' is at (8,2). A large 'x' is at (8,1). A large 'v' is at (8,0). A large 'x' is at (9,9). A large 'v' is at (9,8). A large 'x' is at (9,7). A large 'v' is at (9,6). A large 'x' is at (9,5). A large 'v' is at (9,4). A large 'x' is at (9,3). A large 'v' is at (9,2). A large 'x' is at (9,1). A large 'v' is at (9,0).

Obr. 2: Tabuľka (zvislo je počet v prvej kôpke, horizontálne počet v druhej kôpke)

Riešenie. Spravme si najprv tabuľku, čo vidíme? Vieme si tabuľku 1001×1001 rozdeliť na bloky 5×6 , kde sa opakujú vyhrávajúce/prehrávajúce stavy. Dobré pozorovanie je, že začiatkové políčko $[1000, 1000]$ je vyhrávajúce, čiže hľadáme víťaznú stratégiu pre začínajúceho.

Vieme si všimnúť, že prehrávajúce pozície sú také, kde:

$$x \bmod 6 = y \bmod 5$$

Takto sa môžeme hýbať len vrámci bloku (lebo ak nie sme na prehrávajúcom políčku tak vieme vždy sa pohnúť na prehrávajúce políčko vrámci bloku). Tým budeme nútiť súpera vychádzať mimo blok, až kým sa nedostaneme do ľavého spodného bloku, kde v našom ťahu stúpime na políčko $[0, 0]$ - čiže vezmeme poslednú zápalku a vyhrali sme. Keďže počet zápaliiek sa neustále znižuje, najviac po 2000 ťahoch sa táto hra ukončí.