

Spernerova veta

Denys Andrukhovskiy

denys.andrukhovskiy@trojsten.sk

Poznamka: tento text vo veľkej miere je len prekladom zdroja [1].

Mnohé matematické úlohy (napr. úlohy o vahách) sú spojené s dôležitou úvahou „extrakcii informácií“. Tato prednáška je venovaná úlohám, v ktorých pre túto extrakciu použijeme kombinatorické myšlienky.

Informácia potrebuje kódovanie. My budeme pracovať s binárnymi kódmi: konečnými postupnosťami nul a jednotiek. Pre dvojicu kódov $a = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ a $b = \beta_1\beta_2\dots\beta_n$ rovnakej dĺžky n definujeme usporiadanie:

$$a \leq b \iff \alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$$

Napríklad, $010 \leq 011$. Zároveň nie ľubovoľné dva kódy rovnakej dĺžky — napríklad, kódy $a = 110$ a $b = 101$ nevieme porovnať: $\beta_2 \leq \alpha_2$ a zároveň $\alpha_3 \leq \beta_3$. Také dvojice kódov budeme volať *neporovnateľné*.

Neporovnateľné kódy môžu byť užitočným nástrojom v situáciách, kde treba extrahovať informáciu. Pozrieme sa na hračiarový príklad, čo je len modifikované cvičenie 8, ktoré sa vyskytlo na Moskovskej matematickej olympiáde v roku 2017.

Úloha 1. Detektív vyšetroje zločin. Vie, že v množine podozrivých osôb sa okrem páchatela nachádza aj svedok (nie je však známe, kto to je). Každý deň môže detektív pozvať k sebe jednu alebo viacero podozrivých osôb, a ak sa medzi pozvanými nachádza svedok, ale nie páchatel, svedok oznámi, kto je páchatel. Pri akom najväčšom počte podozrivých detektív zaručene vyrieši prípad za štyri dni?

Riešenie. Každému podozrivému priradíme binárny kód dĺžky 4 (podľa počtu dní): jednotka na pozícii i by znamenala, že v i -tý deň detektív zavolať podozrivého, a nula — že nezavolať (napr., podozrivý s kódom 1010 bol zavolaný v prvý a tretí deň, ale nie v druhý a štvrtý). Detektív vyrieši zločin práve vtedy, keď na rovnakých pozíciách v kóde svedka bude jednotka, a v kóde páchatela — nula.

Ale detektív nevie, kto je páchatel, a kto je svedok, takže mu treba organizovať proces tak, aby pre ľubovoľných dvoch podozrivých A a B existoval deň, kedy zavolať A a nezavolať B , a deň, kedy nezavolať A a zavolať B . Inými slovami, kódy A a B musia byť neporovnateľné! Prípad bude zaručene vyriešený, ak bude detektív schopný priradiť všetkým podozrivým navzájom neporovnateľné kódy. Naša úloha sa teda redukuje na otázku, aká je najväčšia možná veľkosť množiny neporovnateľných kódov dĺžky 4.

Cvičenie 1. Dokončíte riešenie tejto úlohy.

Pozrieme sa teraz na kódy ľubovoľnej fixnej dĺžky. Označíme ako a_k kód, v ktorom je práve k jednotiek. Všimneme si, že kódy $a_0 = \underbrace{00\dots0}_n$ a $a_n = \underbrace{11\dots1}_n$ sú porovnateľné so všetkými kódmi.

Reťazcom nazveme ľubovoľnú postupnosť porovnateľných kódov $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \cdots \leq a_n$ (v každom kóde reťazca je o jednu jednotku viac, ako v predchádzajúcom). *Antireťazcom* nazveme ľubovoľnú množinu navzájom neporovnateľných kódov.

Cvičenie 2. Ukážte, že pre kódy dĺžky n existuje práve $n!$ reťazcov.

Cvičenie 3. Ukážte, že daný kód a_k dĺžky n sa nachádza v práve $k!(n-k)!$.

Cvičenie 4. Dokážte, že veličina $k!(n-k)!$ je minimálna pre $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Cvičenie 5. a) Dokážte že ľubovoľný antireťazec má najviac $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ kódov. b) Nájdite príklad antireťazca s počtom kódov $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. c) (*) Nájdite všetky antireťazce s počtom kódov $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Fakticky ste dokázali Spernerovu vetu, ktorá obyčajne sa formuluje v jazyku teórii množín. Konkrétne, nech S je n -prvková množina, a $\mathcal{P}(S)$ — množina všetkých jeho podmnožín. Súbor množín $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ nazveme *antireťazcom* v S , ak pre žiadnu dvojicu $M, N \in \mathcal{A}$ neplatí $M \subseteq N$.

Veta 1 (Spernerova veta). *Antireťazec v $\mathcal{P}(S)$ môže mať najviac $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ prvkov. Zároveň túto hranicu dosahuje len jeden antireťazec pre párne n a dvojica reťazcov pre nepárne n .*

Cvičenie 6. Vysvetlite, prečo môžeme považovať Spernerovu vetu za dokazanu.

Cvičenie 7. V škole sa vyučuje $2n$ predmetov. Všetci žiaci majú známky iba 4 a 5. Žiadni dvaja žiaci sa neučia úplne rovnako a o žiadnych dvoch nemožno povedať, že jeden z nich sa učí lepšie než druhý. Dokážte, že počet žiakov v škole nepresahuje $\binom{2n}{n}$.

Za to, že žiak p sa učí lepšie než žiak q , považujeme situáciu, keď má p zo všetkých predmetov známky aspoň také dobré ako q , a z niektorých predmetov lepšie.

Cvičenie 8. Detektív Nero Wolfe vyšetruje zločin. Do prípadu je zapletených 80 ľudí, medzi ktorými je jeden páchatel a ešte jeden svedok zločinu (nie je však známe, kto to je). Každý deň môže detektív pozvať k sebe jedného alebo viacerých z týchto 80 ľudí a ak sa medzi pozvanými nachádza svedok, ale nie páchatel, svedok oznámi, kto je páchatel. Môže detektív vopred zaručiť vyriešenie prípadu za 12 dní?

Cvičenie 9 (Pokračovanie o Nerovi Wolfovi). a) Pri akom najväčšom počte podozrivých bude Nero Wolfe schopný vopred zaručiť vyriešenie prípadu za 12 dní? b) Za aký najmenší počet dní bude Nero Wolfe schopný zaručene vyriešiť prípad pri 80 podozrivých?

Cvičenie 10 (Turnaj miest, 1986, 7–10). Tridsať žiakov jednej triedy sa rozhodlo navštíviť sa navzájom doma. Je známe, že jeden žiak môže počas jedného večera uskutočniť viacero návštev a že v ten večer, keď má k nemu niekto prísť na návštevu, sám nikam nejde. Ukážte, že na to, aby každý navštívil každého,

- a) štyri večery nestačia,
- b) päť večerov tiež nestačí,
- c) desať večerov postačuje,
- d) a dokonca postačuje aj sedem večerov.

Veta 2 (LYM nerovnosť, Lubell, Yamamoto, Mešalkin). *Nech $\mathcal{A}$ je antireťazec v S . Potom*

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

Cvičenie 11. Dokážte vetu 2.

Cvičenie 12 (Littlewood-Offord problem). Nech $a_1, \dots, a_n$ sú reálne čísla s absolutnou hodnotou $|a_i| \geq 1$. Uvažujme všetky možné súčty $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$, kde $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$. Potom počet takých súčtov, čo ležia na intervale $(x-1, x+1)$ je najvyššie $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Cvičenie 13. Nech $\mathcal{N}$ je množina takých kódov, že *neexistuje trojica* $a, b, c \in \mathcal{N}$, taká že $a \leq b \leq c$. Dokážte, že $|\mathcal{N}| \leq 2^{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$.

Cvičenie 14. Nech $b_1, \dots, b_m$ sú kódy také že pre ľubovoľné i, j platí: ak b_i a b_j sú neporovnateľné, tak každý znak β_{ik} je opačný ku znaku β_{jk} . Dokážte, že $m \leq 2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$.

Referencie

- [1] I.V. Jakovlev. *Spernerova veta*. <https://mathus.ru/math/sperner.pdf>. 2018.
- [2] Jiří Matoušek a Jaroslav Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. <https://dvpipracollege.ac.in/wp-content/uploads/2023/01/Invitation-to-Discrete-Mathematics-Nesetril-Matousek-PDFDrive-.pdf>. 2008.
- [3] Cosmin Pohoata. *Math 244: Discrete Mathematics*. <https://pohoatza.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/11/244notes.pdf>. 2020.