

Recipročné rovnice

Lukáš Gáborik

Cvičenie 1. Vyriešme rovnicu

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Riešenie. Popreskupujme rovnaké členy a dostaneme

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 &= (2x^3 + 2) + (3x^2 + 3x) = 2(x^3 + 1) + 3x(x + 1) = \\ &= 2(x + 1)(x^2 - x + 1) + 3x(x + 1) = (x + 1)[2(x^2 - x + 1) + 3x] = \\ &= (x + 1)(2x^2 + x + 2). \end{aligned}$$

Máme teda jedno riešenie $x = -1$. Okrem toho treba doriešiť kvadratickú rovnicu $2x^2 + x + 2$. Tá má záporný diskriminant, čiže ďalšie riešenie nenájde.

Pre aké polynómy sa dá aplikovať podobný postup?

Definícia 1. Rovnicu $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$ nazývame *recipročnou rovnicou prvého typu* (R1), ak koeficienty spĺňajú $a_i = a_{n-i}$ pre všetky i .

Tvrdenie 1. Recipročná rovnica prvého typu **nepárneho stupňa** ($R1n$) má koreň -1 .

Ešte si môžeme všimnúť, že to, čo nám po vydelení koreňovým činiteľom zostalo, bola opäť recipročná rovnica. Platí to aj vo všeobecnosti tak?

Lema 2. Po vydelení ($R1n$) členom $(x + 1)$ dostaneme ($R1$).

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i x^i &= \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (a_i x^i + a_{n-i} x^{n-i}) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} a_i x^i (x^{n-2i} + 1) = \\ &= (x + 1) \sum_{i=0}^{(n-1)/2} a_i x^i (x^{n-2i-1} - x^{n-2i-2} + \dots - x + 1). \end{aligned}$$

Keď sa na tieto polynómy pozrieme ako polynómy stupňa $n - 1$, majú i prvých a i posledných koeficientov nulových a na ostatných sú koeficienty symetricky. $\square$

Rovnako ako máme vzťahy na $x^{2k+1} + 1$, vieme rozložiť aj $x^{2k+1} - 1$. Dá sa teda vymyslieť podobná teória pre iné rovnice?

Definícia 2. Rovnicu $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$ nazývame *recipročnou rovnicou druhého typu* (R2), ak koeficienty spĺňajú $a_i = -a_{n-i}$ pre všetky i .

Tvrdenie 3. Každá ($R2$) má koreň 1 .

Lema 4. Po vydelení (R2) členom $(x - 1)$ dostaneme (R1).

Všetky recipročné rovnice teda vieme zredukovať na (R1p). Čo vieme ešte urobiť s touto?

Cvičenie 2. Vyriešme rovnicu

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Riešenie. Vydelíme rovnicu členom x^2 . To vieme urobiť, keďže 0 zjavne nemôže byť jej riešením. Potom po preusporiadaní členov dostaneme

$$0 = 6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38.$$

Teraz urobíme substitúciu $t = x + \frac{1}{x}$. Premyslite si, že z toho vieme vždy $x^n + \frac{1}{x^n}$ vyjadriť ako polynóm od t , napríklad

$$\begin{aligned} t^2 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \\ t^2 &= x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= t^2 - 2. \end{aligned}$$

Tým sa nám rovnica zredukuje na

$$0 = 6(t^2 - 2) - 5t - 38 = 6t^2 - 5t - 50,$$

čo je už len kvadratická rovnica, a ľahko zistíme, že jej koreňmi sú $t_1 = \frac{10}{3}$, $t_2 = -\frac{5}{2}$, ktorým prislúchajú riešenia $3, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{2}$.

Uvedomte si, že takýmto spôsobom zredukujeme (R1p) na rovnicu s polovičným stupňom. Táto rovnica už však nemusí byť recipročná, ako sme videli aj v predošlom cvičení.

Cvičenie 3. Z predošlého cvičenia to vyzerá, že ak je riešením recipročnej rovnice x_0 , tak je jej riešením aj $\frac{1}{x_0}$. Dokážte.

Úloha 1. Táto rovnica síce nie je recipročná, no aj tak nejak súvisí s prednáškou. Vyriešte ju.

$$3x^3 + 26x^2 + 52x + 24 = 0.$$

Hinty: 1

Hinty

1. Skúste zoskupiť členy rovnako, ako pri riešení klasickej recipročnej rovnice.