

Princíp inklúzie a exklúzie

Jakub Skaloš

Úloha 1. V autobuse je celkovo 102 cestujúcich. 49 z nich hovorí Albánsky, 34 Bulharsky a 21 Chorvátsky. Siedmi ľudia ovládajú Albánsky a Bulharsky, piati Albánsky a Chorvátsky, deväti Bulharsky a Chorvátsky. Všetkými tromi jazykmi hovoria dvaja ľudia. Koľkí z cestujúcich nehovoria žiadnym z týchto troch jazykov?

Riešenie. Nakreslíme si Vennov diagram a označíme si hodnoty vo všetkých častiach. Čo sa stane ak sčítame $P_A + P_B + P_C$? Ktorú plochu sme sčítali aký počet krát?

$$102 - (P_A + P_B + P_C) + (P_{AB} + P_{AC} + P_{BC}) - P_{ABC} = 17$$

Úloha 2. Koľko čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 5000\}$ nie je deliteľných žiadnym z čísel 2, 3 a 7?

Riešenie.

$$\begin{aligned} 5000 - \left(\frac{5000}{2} + \left\lfloor \frac{5000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{7} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{5000}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5000}{3 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{5000}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor \right) = \\ = 5000 - (2500 + 1666 + 714) + (833 + 357 + 238) - 119 = 1429 \end{aligned}$$

Úloha 3. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré (chápané ako postupnosti) obsahujú aspoň jednu z postupností (1, 2, 3) alebo (4, 5, 6) ako súvislú podpostupnosť?

Riešenie. Každú pospostupnosť môžeme chápať ako ďalší prvok množiny, čiže možností pre jednu podpostupnosť je $98!$. Pre obe podpostupnosti naraz to bude $96!$. Počet možností dokopy teda bude

$$(98! + 98!) - 96!$$

.

Úloha 4. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré neobsahujú (kludne aj nesúvislé) podpostupnosti (62, 19, 31), (100, 1, 8), ani (42, 44, 8, 55)?

Riešenie. Možnosti k -prvkových nesúvislých podpostupností je $\binom{100}{k}(100-k)!$. Počet možností je:

$$\begin{aligned} 100! - \left[\binom{100}{3} \cdot 97! + \binom{100}{3} \cdot 97! + \binom{100}{4} \cdot 96! \right] \\ + \left[\binom{100}{3} \cdot 97! + \binom{100}{3} \cdot 97! + \binom{100}{4} \cdot 96! \right] \\ - \left[\binom{100}{3} \binom{97}{3} \cdot 94! + \binom{100}{3} \binom{97}{4} \cdot 93! + \binom{100}{6} \binom{4}{2} \cdot 94! \right] \\ + \binom{100}{3} \binom{97}{6} \binom{4}{2} \cdot 91! \end{aligned}$$

Úloha 5. Máme tri zlaté mince, štyri strieborné mince a päť bronzových. Koľkými spôsobmi z nich možno vybrať desať mincí?

Riešenie. Aké by vyzeralo riešenie, kebyže máme mincí neobmedzene?

$\binom{10+2}{2}$, lebo vyberáme 2 oddelovače.

Musíme však odpočítať invalidné možnosti. Invalidná možnosť, ak uvažujeme presah počtu u napr. zlatých mincí je $\binom{10-4+2}{2}$, pretože uvažujeme výber aspoň 4 zlatých mincí (keďže ich je najviac 3).

Dokopy možností teda bude:

$$\binom{10+2}{2} - \left[\binom{10-4+2}{2} + \binom{10-5+2}{2} + \binom{10-6+2}{2} \right] + \left[\binom{10-4-5+2}{2} + \binom{10-4-6+2}{2} + 0 \right] - 0$$

Úloha 6. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$ takých, že ani jedno číslo a_i sa nerovná vlastnému indexu?

Riešenie. Pozeráme sa na zjednotenia množín keď a_i je chybné, a_i aj a_j je chybné... :

$$\begin{aligned} 100! - \binom{100}{1} \cdot 99! + \binom{100}{2} \cdot 98! - \dots + \binom{100}{98} \cdot 2! - \binom{100}{99} \cdot 1! + \binom{100}{100} 0! = \\ = \sum_{i=0}^{100} (-1)^i \binom{100}{i} (100-i)! \end{aligned}$$

Denysov funfact: pravdepodobnosť že náhodná permutácia má túto vlastnosť: počet možností vydělíme 100!

$$\frac{\sum_{i=0}^{100} \frac{100!(-1)^i}{i!(100-i)!} (100-i)!}{100!} = \sum_{i=0}^{100} \frac{(-1)^i}{i!} \rightarrow e^{-1}$$

ak by sme nemali 100 ale $n \rightarrow \infty$, pretože suma je Taylorov rozvoj.

Úloha 7. Koľko existuje všetkých permutácií množiny $\{1, \dots, 100\}$, ktoré neobsahujú $i, i+1$ v tomto poradí priamo za sebou?

Riešenie. $i+1$ sa zgrupí s prvkom i do jedného prvku a vráti naspäť do množiny. To vie spraviť každé číslo až na 1, čiže dokopy 99.

$$\begin{aligned} 100! - \binom{99}{1} \cdot 99! + \binom{99}{2} \cdot 98! - \dots + \binom{99}{98} \cdot 2! - \binom{99}{99} \cdot 1! = \\ = \sum_{i=0}^{99} (-1)^i \binom{99}{i} (100-i)! \end{aligned}$$

Úloha 8. Koľko existuje $2n$ -prvkových postupností, ktoré:

- každé z čísel $1, 2, \dots, n$ obsahujú práve dvakrát a zároveň
- obsahujú aspoň na jednom mieste dve rovnaké čísla vedľa seba?

Riešenie.

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} \cdot (2n-1)! - \binom{n}{2} \cdot (2n-2)! + \dots \pm \binom{n}{n} \cdot (2n-n)! = \\ = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (2n-i)! \end{aligned}$$