

Počítanie dvomi spôsobmi

Dominik Rigasz

Úvod

Počítanie dvomi spôsobmi je veľmi mocný nástroj na dokazovanie (nielen) kombinatorických identít. V príspevku si ukážeme niekoľko úloh, ktoré možno touto technikou vyriešiť a pokúsime sa naučiť spôsob, ako riešenie takýchto úloh vymýšľať.

Úloha od nás často chce, aby sme spočítali nejakú veličinu. Avšak to môže byť obtiažné urobiť priamo, a tak namiesto toho spočítame nejakú inú (súvisiacu) veličinu, ktorú už vieme spočítať lepšie – a to hneď dvoma spôsobmi. Keď dve dosiahnuté hodnoty porovnáme, vieme povedať niečo o pôvodnej veličine.

Veľmi časté je napríklad počítanie takzvaných incidencií niečoho, teda počítanie usporiadaných dvojíc (X, Y) , pre ktoré platia nejaké podmienky. Počítanie takejto hodnoty dvoma spôsobmi je prirodzené – najprv spočítame dvojice cez X , potom cez Y . Túto ideu si lepšie ukážeme na príklade:

Úloha 1 (motivačná). Na večierku je 6 chlapcov a 10 dievčat. Každý chlapec si potriasol ruku s presne polovicou dievčat. Každé dievča si potriaslo rukou s práve k chlapcami. Zistite hodnotu k .

Riešenie. Kľúčová myšlienka je spočítať počet podaní rúk – teda počet usporiadaných dvojíc (chlapec C , dievča D), kde C a D si podali ruku. Označme tento počet ako P . Ak počítame najprv cez chlapcov, tak každý chlapec si podal ruku s 5 dievčatami, teda dokopy nastalo $6 \cdot 5 = 30$ podaní rúk. Preto $P = 30$.

Na druhú stranu, ak počítame P cez dievčatá, tak vieme, že každé dievča si podalo ruku s práve k chlapcami, a teda dokopy došlo k $10 \cdot k$ podaniam rúk. Preto $P = 10k$.

Vidíme tak, že $30 = P = 10k$, a teda $k = 3$.

Okrem počítania usporiadaných dvojíc objektov, ktoré niečo spĺňajú, je tiež častá nejaká vhodná kombinatorická interpretácia situácie (hlavne pri dokazovaní identít), na ktorú opäť vieme nahliadnúť dvoma spôsobmi:

Úloha 2 (motivačná). Spočítajte

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n}$$

Riešenie. Chceme sa na tento súčet pozrieť ako na reprezentáciu nejakej situácie. Kombinačné čísla v súčte naznačujú, že nám pôjde o všetky podmnožiny n -prvkovej množiny, pričom každá i -prvková podmnožina prispieva do súčtu práve i (počet svojich prvkov). Môžeme si to predstaviť tak, že máme tréning futbalistov, kde sa postupne zídu všetky možné skupinky z daného n -členného tímu a v každej skupinke vždy každý hráč vystrelí na bránu.

Ide teda o strely na bránku, čo zodpovedá dvojiciam (skupina, hráč zo skupiny). Jeden spôsob, ako dvojice spočítať, je zvoliť najprv skupinu a potom hráča z nej – takto dostaneme súčet zadaný v úlohe. Druhý spôsob je zvoliť najprv hráča, ktorý bude strieľať, a potom k nemu doplniť nejakých hráčov (pokojne žiadneho), čím vytvoríme skupinku. Tým máme na výber n strelcov a ku každému pridávame ľubovoľnú podmnožinu zo zvyšných $n - 1$ hráčov, takže dostávame celkom $n \cdot 2^{n-1}$ striel.

Kombinatorické identity

Cvičenie 1. Dokážte $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. **Hinty:** 1

Cvičenie 2. Dokážte $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. **Hinty:** 2

Cvičenie 3. Dokážte $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. **Hinty:** 3

Cvičenie 4. Dokážte $\binom{n}{r}r = n\binom{n-1}{r-1}$. **Hinty:** 4

Cvičenie 5. Dokážte $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$. **Hinty:** 5

Cvičenie 6. Dokážte

$$\binom{n+m+1}{m} = \sum_{i=0}^m \binom{n+i}{i}.$$

Hinty: 6

Príklady

Cvičenie 7 (MO-A 74-II-3). V tíme je sedem hráčov. V každom kole turnaja ich päť hrá a dvaja sedia na tribúne. Dokážte, že nezávisle od (kladného) počtu kôl aj výberu päťíc je možné na konci turnaja nájsť dvoch hráčov, ktorí boli spolu (či už na ihrisku, alebo na tribúne) vo viac ako polovici kôl. **Hinty:** 7

Cvičenie 8. Na detskom tábore je 15 detí. Každý deň majú tri deti službu v kuchyni a platí, že každá dvojica detí má práve raz spoločnú službu. Koľko dní trvá tábor? **Hinty:** 8

Cvičenie 9. Pri zápočtovej písomke každý študent vyriešil aspoň tretinu všetkých úloh a navyše väčšina študentov vyriešila aspoň dve tretiny úloh. Ukážte, že v písomke existuje úloha, ktorú vyriešila väčšina študentov. **Hinty:** 9

Cvičenie 10. Polia mriežky 21×21 sú ofarbené tak, že v každom riadku aj stĺpci sa vyskytuje najviac 5 rôznych farieb. Ukážte, že sa niektorá z farieb vyskytuje v troch riadkoch a zároveň aj v troch stĺpcoch. **Hinty:** 10

Cvičenie 11. V matematickej olympiáde riešilo 45 účastníkov šesť príkladov, každý príklad bol vyriešený práve 25 riešiteľmi. Ukážte, že môžeme vybrať dvoch účastníkov, ktorí dohromady vyriešili všetko. **Hinty:** 11

Cvičenie 12. V poslaneckej snemovni je 200 poslancov, ktorí postupne hlasujú o n zákonoch. Poslanec môže byť buď za schválenie zákona, alebo proti, alebo sa môže zdržať hlasovania. Je známe, že pre každé dve hlasovania existuje poslanec, ktorý v jednom hlasoval za a v druhom proti. Označme si počet poslancov, ktorí sa zdržali hlasovania o i -tom zákone, ako z_i . Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^n 2^{z_i} \leq 2^{200}.$$

Hinty: 12

Cvičenie 13. V obdĺnikovej tabuľke $m \times n$ sú napísané nezáporné reálne čísla, pričom každý stĺpec aj každý riadok obsahuje aspoň jedno kladné číslo. Pokiaľ sa navyše riadok a stĺpec pretínajú v políčku, kde je kladné číslo, tak je ich súčet rovnaký. Dokážte, že $m = n$. **Hinty:** 13

Cvičenie 14 (ISL 2024 C1). Nech je n kladné celé číslo. Trieda n študentov beží n pretekov, pričom v každom z nich sú zoradení bez remíz. Študent je oprávnený na hodnotenie (a, b) pre kladné celé čísla a a b , ak sa umiestni medzi prvými b miestami aspoň v a pretekoch. Jeho konečné skóre je maximálna možná hodnota $a - b$ spomedzi všetkých hodnotení, na ktoré má nárok. Nájdite maximálny možný súčet všetkých skóre n študentov. **Hinty:** 14

Cvičenie 15. Ukážte, že každý graf s n vrcholmi neobsahujúci žiadne cykly dĺžky presne 4 má nanajvýš $\frac{\sqrt{n^3+n}}{2}$ hrán. **Hinty:** 15

Hinty

1. Majme n guľôčok a počítajme, na koľko spôsobov možno vybrať k guľôčok. Bud' ich vyberieme k , alebo ich nevyberieme $n - k$.
2. Vyberáme $k + 1$ guľôčok z $n + 1$ guľôčok. Prvú bud' vyberieme, alebo nie.
3. Vyberáte podmnožiny n -prvkovej množiny. Každý prvok bud' vyberiete, alebo nie.
4. Sú dva postupy, ako z n futbalistov vybrať r hrajúcich hráčov a jedného kapitána. Bud' najprv vyberieme z n hráčov r hrajúcich a potom kapitána. Alebo najprv vyberieme kapitána a potom zvyšok tímu zo zvyšných $r - 1$ hráčov.
5. Prvý spôsob: najprv vyberieme z n hráčov r hrajúcich a z nich k útočníkov. Druhý spôsob: najprv vyberieme k útočníkov a potom doberieme zvyšok tímu zo zvyšných $r - k$ hráčov.
6. ?
7. Skúste spočítať počet dvojíc (dvojica hráčov H_1, H_2 , kolo K , v ktorom H_1, H_2 boli spolu).
8. Počítajte dvomi spôsobmi počet dvojíc (množina dvoch detí, deň). Najprv fixujte množinu detí a potom deň.
9. Počítajte dvomi spôsobmi dvojice (úloha, študent), ale pozor na to, že dve informácie nie sú zameniteľné.
10. Po riadkoch, po stĺpcoch.
11. Všimnite si, že existuje účastník, ktorý vyriešil aspoň štyri úlohy, a tiež existuje účastník, ktorý vyriešil zvyšné dve.
12. Koľko najviac hlasovaní mohlo prebehnúť, ak by každý hlasoval za alebo proti? Koľkými spôsobmi možno doplniť tie hlasovania, kde sa niekto zdržal, tak, aby každý hlasoval? Počítajte počet dvojíc (zákon, možný výsledok bez nerozhodných hlasov).
13. Uvážte podtabuľku tvorenú riadkami a stĺpcami takými, že súčet čísel v každom z nich je rovnaký. Aké má táto podtabuľka rozmery?.
14. ?
15. Počítajte dvomi spôsobmi počet „vidličiek“, teda trojíc vrcholov a, b, c , kde b je spojené hranou s a aj s c . Použite CS (Cauchy-Schwarzovu) nerovnosť, aby ste zo štvorcov incidencií dostali odhad na počet hrán.

Literatúra a zdroje

1. Filip Čermák: Počítání dvěma způsoby, Lysečiny, 2021.
2. <https://skmo.sk/dokumenty.php>.
3. Kombinatorika a grafy 1, Josef Tkadlec, MFF UK, 2025/26.