

Mocnosť bodu ku kružnici

Barbora Novosadová

Definícia 1. Je daný bod M a kružnica k se stredom O a polomerom r . **Mocnosťou bodu M ku kružnici k** rozumieme číslo

$$p(M, k) = |MO|^2 - r^2.$$

Tvrdenie 1. *Nech M je bod a $k(O, r)$ kružnica.*

1. $p(M, k) = 0 \Leftrightarrow M \in k$ Mocnosť je kladná/záporná ak je M vonku/vnútri kružnice.
2. Nech M leží mimo kružnice. Nech $T \in k$ je taký, že MT je dotyčnicou. Potom $p(M, k) = |MT|^2$.
3. Nech $N \neq M$. Ak $p(Mk) = p(Nk)$, potom $|MO| = |NO|$ (body s rovnakou mocnosťou k danej kružnici ležia na kružnici).
4. Nech priamka p pretína k v bodoch A, B . Potom $|MA||MB| = p(Mk)$. [hint: $|\angle MTA| = |\angle MBT|$; stredové/obvodové uhly]

Tvrdenie 2. *Nech $ABCD$ je štvoruholník, nech $Q \in AD \cap BC$. Potom $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď $|QA||QD| = |QB||QC|$.*

Definícia 2. Nech $k(K, r), l(L, s), K \neq L$ sú kružnice. Množina všetkých bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k oboom kružniciam, sa nazýva **chordála**.

Veta 3. *Nech k, l sú ako v definícii 2. Potom chordála je kolmá na KL , pričom jej priesečníkom s KL je taký bod P , pre ktorý platí*

$$|KP| = \frac{|KL|^2 + r^2 - s^2}{2|KL|}$$

Dôkaz. Hľadáme bod X , ktorý má k oboom kružniciam rovnakú mocnosť. Z bodu 3. tvrdenia 1 bod X zároveň leží na 2 kružniciach sústredných s k a l , musí teda byť ich priesečníkom. Ďalej je to plus mínus Pytagorova veta + mocnosť. $\square$

Úloha 1. Ako je to s chordálou pre sústredné kružnice?

Riešenie. Použi tvrdenie 1 body 3. a 1.

Úloha 2. Nech priamka p vedená bodom M pretne kružnicu k v bodoch A, B . Nech T je ľubovoľný bod na k . Potom priamka MT je dotyčnicou ku k práve vtedy, keď $|\angle MAT| = |\angle MTB|$

Riešenie. $(\Rightarrow)$ stačí využiť to, čo v tvrdení 1.4. $(\Leftarrow)$ Podobné trojuholníky implikujú $|MA||MB| = |MT|^2$. Keby je MT sečnica, platí pre druhý priesečník $T' \neq T$: $|MT||MT'| = |MA||MB| = |MT|^2$ čo je spor, keďže polpriamky MT a MT' sú totožné.

Úloha 3. Kružnice k, l so stredmi K, L sa pretnú v bodoch A, B . Priamka AB pretne spoločnú dotyčnicu kružníc k, l , ktorá sa ich dotýka v bodoch T, U , v bode P . Potom $|PT| = |PU|$.

Riešenie. Platí $|TP|^2 = p(P, k) = |PA||PB| = p(P, l) = |UP|^2$, takže $|TP| = |UP|$.
Poznámka: P leží na chordále týchto kružníc. Chordála je priamka cez P kolmá na KL , pričom to isté platí o AB . Spoločná tetiva pretínajúcich sa kružníc je teda ich chordálou.

Úloha 4. Kružnice k, l so stredmi K, L sa pretnú v bodoch X, Y . Bodom M ved' me priamky p, q , ktoré pretnú k, l v bodoch A a B, C a D . Potom body A, B, C, D ležia na 1 kružnici práve vtedy, keď M leží na XY . *Využitie:* úloha "dokáž, že 4 body ležia na kružnici" je zameniteľná s úlohou "tri priamky sa pretnú v 1 bode".

Cvičenie 1. Sú dané dve nepretínajúce sa, nesústredné kružnice k, l . Zkonštruujme ich štyri spoločné dotyčnice a na každej vyznačme stred úsečky určenej príslušnými bodmi dotyku. Dokážte, že tieto štyri body ležia na 1 priamke.

Cvičenie 2. Je daný štvorec $ABCD$. Kružnica k vedená cez A a C pretne kružnicu l vedenú cez B a D v bodoch P, Q . Dokážte, že stred štvorca $ABCD$ leží na PQ . Platí to isté pre obdĺžnik? Kosoštvorec?

Cvičenie 3. Je daná kružnica k a body A, B , ktoré ležia mimo nej. Pohyblivá priamka cez A pretína k v bodoch X, Y . Dokáž, že kružnice opísané trojuholníkom BXY sa pretínajú v jednom bode rôznom od B .

Cvičenie 4. Sú dané nepretínajúce sa kružnice k, l . Jedna spoločná vonkajšia tetiva sa dotýka k v bode A , tá druhá sa dotýka l v bode D . Dokážte, že úsečka AD vytne na k, l rovnako dlhé tetivy.

Cvičenie 5. Uhlopriečky lichobežníka $ABCD$ sa pretínajú v bode P . Kružnica opísaná trojuholníku BCD pretína AP druhýkrát v bode A_1 . Podobne definujme B_1, C_1, D_1 . Dokážte, že $A_1B_1C_1D_1$ je tiež lichobežník.