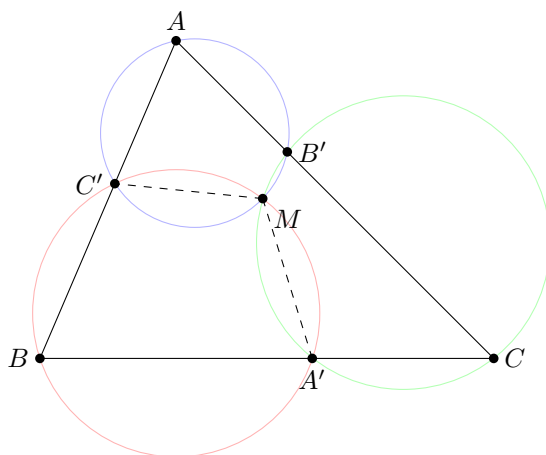


Miquelov Bod

Michal Ilkovič

1 Teória

Veta 1 (Miquelova veta). *Nech $\triangle ABC$ je trojuholník a body A', B', C' ležia postupne na stranách BC, CA, AB . Potom kružnice opísané trojuholníkom $AB'C'$, $A'BC'$ a $A'B'C$ sa pretínajú v jednom spoločnom bode M , ktorý nazývame Miquelov bod.*



Dôkaz. Nech M je druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom $A'BC'$ a $A'B'C$. Naším cieľom je dokázať, že štvoruholník $MAC'B'$ je tetivový (teda že M leží aj na tretej kružnici).

Využijeme vlastnosti tetivových štvoruholníkov (súčet protíľahlých uhlov je 180°):

1. Keďže $BA'MC'$ je tetivový, platí: $\angle A'MC' = 180^\circ - \angle CBA$.
2. Keďže $A'CB'M$ je tetivový, platí: $\angle A'MB' = 180^\circ - \angle BCA$.

Súčet uhlov okolo bodu M je 360° , preto pre tretí uhol platí:

$$\begin{aligned}\angle B'MC' &= 360^\circ - (\angle A'MC' + \angle A'MB') \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle ABC + 180^\circ - \angle BCA) \\ &= \angle ABC + \angle BCA\end{aligned}$$

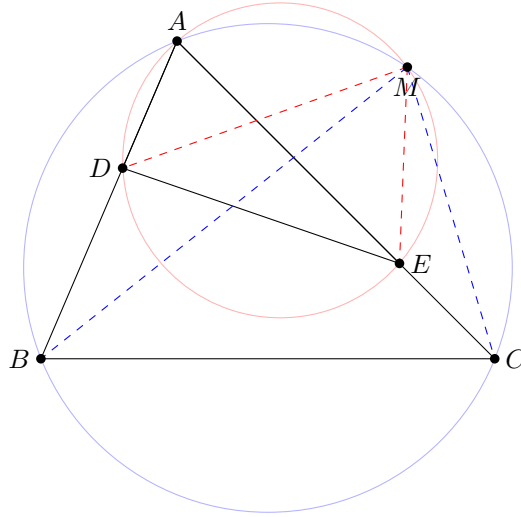
V trojuholníku ABC platí $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$, teda $\angle CAB + \angle ABC = 180^\circ - \angle BCA$. Dosadením dostávame:

$$\angle B'MC' = 180^\circ - \angle BCA$$

Tým pádom bod M musí ležať na kružnici opísanej trojuholníku $A'B'C$. □

Dôsledok 1.1. *Miquelova veta platí, aj keď sa body A', B', C' nenachádzajú vnútri strán $\triangle ABC$. Stačí, aby ležali na priamkach BC, CA, AB . Pri dôkaze ale treba nahradiť veľkosti uhlov za orientované uhly.*

Veta 2 (Miquelov bod a Špirálka). *V $\triangle ABC$ na stranách AB a AC sú body D, E . Kružnice opísané $\triangle ABC$ a $\triangle ADE$ sa pretínajú v bode M . Dokáž, že M je stred špirálovitej súmernosti, ktorá posieľa D na B a E na C .*



Dôkaz. Chceme dokázať, že bod M je stredom špirálovitej podobnosti, ktorá zobrazuje bod D na B a bod E na C . To je ekvivalentné tvrdeniu, že trojuholníky $\triangle MDB$ a $\triangle MEC$ sú priamo podobné. K tomu stačí ukázať rovnosť dvoch dvojíc orientovaných uhlov. Orientované uhly budeme označovať symbolom $\angle(p, q)$.

Najprv ukážeme rovnosť uhlov pri vrchole M . Z tetivovosti štvoruholníka $ADME$ (kružnica opísaná $\triangle ADE$) vyplýva:

$$\angle(MD, ME) = \angle(AD, AE) = \angle(AB, AC) \quad (1)$$

Z tetivovosti štvoruholníka $ABMC$ (kružnica opísaná $\triangle ABC$) vyplýva:

$$\angle(MB, MC) = \angle(AB, AC) \quad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) dostávame $\angle(MD, ME) = \angle(MB, MC)$.

Teraz dokážeme rovnosť uhlov pri zostávajúcich vrcholoch. Z tetivovosti štvoruholníka $ADME$ platí:

$$\angle(ME, MD) = \angle(MA, AE) = \angle(MA, AC) = \angle(MB, MC) \quad (3)$$

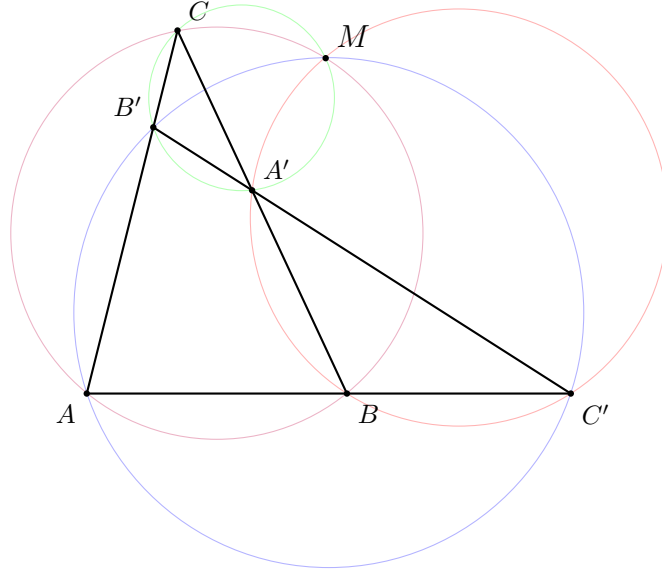
Pričom posledná rovnosť plynie z tetivovosti štvoruholníka $ABMC$. Takže podľa vety uu:

$$\triangle MDB \sim \triangle MEC \quad (4)$$

Teda M je stredom špirálovitej podobnosti zobrazujúcej $D \rightarrow B$ a $E \rightarrow C$. $\square$

Definícia 1 (Úplný štvorstranník). Je množina štyroch priamok so šiestimi priesečníkmi v jednej rovine, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným spoločným bodom a žiadne dve nie sú rovnobežné.

Veta 3 (Miquelova veta pre úplný štvorstranník). *Majme situáciu z vety 1, teda nech $\triangle ABC$ je trojuholník a body A', B', C' ležia postupne na priamkach BC, CA, AB , ale pridajme ešte podmienku, že A', B', C' ležia na priamke. Potom priamky $AB, AC, BC, A'B'C'$ tvoria úplný štvorstranník a kružnica opísaná $\triangle ABC$ prechádza Miquelovým bodom.*



Dôkaz. Označme si priamky $p_1 = AB, p_2 = AC, p_3 = BC, p_4 = A'B'$. Nech M je priesečník kružníc opísaných $\triangle AB'C'$ a $\triangle A'BC'$. Z tetivovosti štvoruholníkov $AC'MB'$ a $BA'MC'$ pre orientované uhly platí:

$$\angle(MB', MC') = \angle(AB', AC') = \angle(p_2, p_1) \quad (5)$$

$$\angle(MC', MA') = \angle(BC', BA') = \angle(p_1, p_3) \quad (6)$$

Sčítaním týchto dvoch rovností dostávame:

$$\angle(MB', MA') = \angle(MB', MC') + \angle(MC', MA') = \angle(p_2, p_1) + \angle(p_1, p_3) = \angle(p_2, p_3) \quad (7)$$

Rovnosť $\angle(MB', MA') = \angle(p_2, p_3)$ znamená, že body M, A', B', C ležia na jednej kružnici. Teda M leží na kružnici opísanej $\triangle A'B'C'$. Teraz už iba stačí dokázať, že M leží na kružnici opísanej $\triangle ABC$. Z tetivovosti B', A', M, C a A, C', M, B' dostávame pre orientované uhly:

$$\angle(MB', MC) = \angle(A'B', A'C') = \angle(p_3, p_4) \quad (8)$$

$$\angle(MB', MA) = \angle(C'A, C'B') = \angle(p_1, p_4) \quad (9)$$

Znovu sčítaním dostávame:

$$\angle(MA, MC) = \angle(MC, MB') + \angle(MB', MA) = \angle(p_1, p_3) \quad (10)$$

čo dokazuje, že bod M leží aj na kružnici opísanej $\triangle ABC$. Všetky štyri kružnice sa teda pretínajú v jedinom bode M . $\square$

Veta 4 (Opačná implikácia Miquelovej vety). *Nech $\triangle ABC$ je trojuholník a body A', B', C' ležia postupne na priamkach BC, CA, AB , Nech Miquelov bod leží na kružnici opísanej $\triangle ABC$. Potom A', B', C' ležia na priamke.*

Dôkaz. Dokážeme implikáciu $M \in k_{\triangle ABC} \implies A', B', C'$ sú kolineárne. Budeme znovu pracovať s orientovanými uhlami priamok. Body sú kolineárne práve vtedy, keď $\angle(A'C', A'B') = 0$. Uvažujme kružnicu opísanú trojuholníku $A'BC'$, na ktorej ležia body M, A', B, C' . Z tetivovosti tohto štvoruholníka vyplýva:

$$\angle(A'C', A'M) = \angle(BC', BM) = \angle(AB, BM) \quad (11)$$

Uvažujme kružnicu opísanú trojuholníku $A'B'C$, na ktorej ležia body M, A', C, B' . Z tetivovosti tohto štvoruholníka vyplýva:

$$\angle(A'M, A'B') = \angle(CM, CB') = \angle(CM, AC) \quad (12)$$

Sčítame rovnice (1) a (2):

$$\begin{aligned} \angle(A'C', A'B') &= \angle(A'C', A'M) + \angle(A'M, A'B') \\ &= \angle(AB, BM) + \angle(CM, AC) \end{aligned} \quad (13)$$

Podľa predpokladu leží bod M na kružnici opísanej $\triangle ABC$. Pre tetivový štvoruholník $ABMC$ platí:

$$\angle(AB, BM) = \angle(AC, CM) \quad (14)$$

Dosadením vzťahu (4) do výsledku z bodu (3) dostávame:

$$\begin{aligned} \angle(A'C', A'B') &= \angle(AC, CM) + \angle(CM, AC) \\ &= \angle(AC, AC) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Nulový orientovaný uhol medzi priamkami $A'C'$ a $A'B'$ znamená, že tieto priamky sú totožné, a teda body A', B', C' ležia na jednej priamke. $\square$

Dôsledok 4.1. *Miquelova veta je teda ekvivalencia. Miquelov bod leží na kružnici opísanej $\triangle ABC$ práve vtedy, keď je A', B', C' kolineárne.*

Dôsledok 4.2 (Simsonova priamka). *Ak $\angle MB'A = \angle MC'B = \angle MA'C = 90^\circ$, tak priamka $A'B'C'$ sa nazýva Simsonova.*

Cvičenie 1. Majme konvexný päťuholník $ABCDE$. Trojici bodov $A, B, EA \cap BC$ (ak prienik existuje) opíšme kružnicu. To isté cyklicky spravíme pre ďalšie štyri trojice bodov. Dokážte, že druhé priesečníky susedných kružníc (rôzne od A, B, C, D, E) ležia na kružnici.

2 Úlohy

Úloha 1 (II. asi 5. alebo 6. Skušobná Matematická Olympiáda). Na stranách AB a AC rôznostranného trojuholníka ABC ležia postupne body D a E tak, že $|BD| = |CE|$. Druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE označme X . Druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABE a ACD označme Y . Dokážte, že $AX \perp AY$. **Hinty:**1

Úloha 2 (IMO 2013). Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s ortocentrom H a nech W je bod na strane BC ležiaci medzi bodmi B a C . Body M a N sú päty výšok spustených z vrcholov B a C . Predpokladajme, že ω_1 je opísaná kružnica trojuholníka BWN a X je bod taký, že WX je priemerom ω_1 . Podobne, nech ω_2 je opísaná kružnica trojuholníka CWM a Y je bod taký, že WY je priemerom ω_2 . Dokážte, že body X, Y a H ležia na jednej priamke. **Hinty:**23

Úloha 3 (IMO 1985). Nech kružnica so stredom O prechádza vrcholmi A a C trojuholníka ABC a pretína strany AB a BC v ďalších rôznych bodoch K a N . Nech M je bod prieniku opísaných kružníc trojuholníkov ABC a KBN (rôzny od bodu B). Dokážte, že $OM \perp BM$. **Hinty:**4

Hinty

1. Pomocou vety 2 treba dokázať, že body X a Y sú antišvrk a švrk.

2. Miquelov bod bude druhý priesečník kružníc ω_1 a ω_2 .
3. A leží na chordále kružníc ω_1 a ω_2 .
4. Pozrite sa na stredy strán AK, CN

Literatúra a zdroje

1. Prednáška od Martiny Vaváčkovej
2. Google Gemini