

Cauchy-Schwarzova nerovnosť

Michal Il'kovič

1 Úvod

Definícia 1. Skalárny súčin dvoch vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: Ak $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, potom:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Definícia 2. Norma vektoru $u \in \mathbb{R}^n$ je definovaná:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

Veta 1 (Cauchy-Schwarzova nerovnosť v zložkách). Pre ľubovoľné dve postupnosti reálnych čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ platí:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \quad (1)$$

Alternatívny zápis pomocou odmocnín (v tvare noriem):

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (2)$$

Rovnosť nastáva vtedy a len vtedy, ak existuje taká konštanta $k \in \mathbb{R}$, že $a_i = k b_i$ pre všetky $i = 1, \dots, n$ (vektory sú lineárne závislé).

Dôkaz. Cauchy-Schwarzova nerovnosť pre vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ hovorí:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (3)$$

Vychádzame z geometrickej definície skalárneho súčinu:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \quad (4)$$

kde $\theta \in [0, \pi]$ je uhol medzi vektormi. Aplikujeme absolútnu hodnotu na obe strany:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos(\theta)| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \quad (5)$$

Keďže pre funkciu kosínus platí, že $|\cos(\theta)| \leq 1$, potom nutne:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cdot 1 \quad (6)$$

Rovnosť nastáva vtedy, keď $|\cos(\theta)| = 1$, teda vektory sú lineárne závislé rovnobežné.

Chceme ukázať, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot (\|\mathbf{u}\| \cos \theta)$, kde druhý člen predstavuje dĺžku kolmého priemetu vektora $\mathbf{u}$ na vektor $\mathbf{v}$. Kosínusová veta pre trojuholník strán $\mathbf{u}, \mathbf{v}, (\mathbf{u} - \mathbf{v})$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \quad (7)$$

Algebraický rozpis cez skalárny súčin:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (8)$$

$$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (9)$$

$$= \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (10)$$

Dáme pravé strany rovníc (5) a (8) do rovnosti:

$$\|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \quad (11)$$

Po odčítaní rovnakých členov a vydelení -2 dostávame:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \underbrace{\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)}_{\text{priemet } \mathbf{u} \text{ do } \mathbf{v}} \quad (12)$$

Tým sme dokázali, že skalárny súčin je rovný dĺžke jedného vektora vynásobenej dĺžkou kolmého priemetu druhého vektora do smeru toho prvého. $\square$

Príklad 1. Máme trojuholník so stranami $a = 3, b = 4, c = 5$. Vo vnútri trojuholníka sa nachádza bod, ktorého vzdialenosti od jednotlivých strán sú x, y, z . Nájdite minimum $x^2 + y^2 + z^2$.

Dôkaz. Vieme sčítať obsahy malých trojuholníkov:

$$\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} = S \implies 3x + 4y + 5z = 12.$$

Uvažujme vektory $\vec{u} = (x, y, z)$ a $\vec{v} = (3, 4, 5)$. Podľa nerovnosti platí:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (3^2 + 4^2 + 5^2) \geq (3x + 4y + 5z)^2.$$

Dosadíme hodnoty štvorcov strán a hodnotu z našej lineárnej väzby:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (9 + 16 + 25) \geq 12^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{144}{50} = \frac{72}{25}.$$

Minimum nastáva, keď sú vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ skalárnym násobkom jeden druhého: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$. Tento bod sa v geometrii nazýva Lemoinov a je to priesečník symedián v trojuholníku. $\square$

2 Úlohy

Úloha 1. Dokážte nerovnosť $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ pre kladné a, b, c . **Hinty:**1

Úloha 2. Pre x, y, z reálne dokážte $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$. **Hinty:**2

Cvičenie 1 (základné a užitočné triky). Dokážte:

$$1. \quad 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \text{ pre } a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$2. \quad n(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2 \text{ pre } a_i \in \mathbb{R},$$

$$3. \quad (a_1 + \dots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2 \text{ pre } a_i \in \mathbb{R}^+,$$

$$4. \quad \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z} \text{ pre } x, y, z \in \mathbb{R}^+,$$

$$5. \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12 \text{ pre tie } x \in \mathbb{R}, \text{ pre ktoré má výraz zmysel.}$$

Úloha 3. Príklad 4. Dokážte pre $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ nerovnosť:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

Hinty:3

Tvrdenie 2 (CS „zlomkobijec“). Nech $n \in \mathbb{N}$. Ďalej nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú nezáporné a $b_1, b_2, \dots, b_n$ sú kladné reálne čísla. Potom platí:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

Úloha 4. Nech a, b, c, d sú kladné čísla spĺňajúce $a + b + c + d = 1$. Ukážte, že platí:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$$

(Írska MO)

Hinty:4

Úloha 5. Pre kladné čísla a, b, c dokážte nerovnosť:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

(Česko-slovensko-poľské stretnutie)

Hinty:5

Úloha 6. Nech a, b, c sú kladné čísla, pričom $abc = 1$. Dokážte, že platí:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}$$

(IMO 1995)

Hinty:6

Tvrdenie 3 (CS na odmocniny). Nech n je prirodzené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sú kladné reálne čísla. Potom platí:

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}$$

Cvičenie 2. Dokážte nasledujúce nerovnosti pre $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$(i) \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$

$$(ii) a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}$$

Úloha 7. Kladné čísla $x, y, z \geq 1$ spĺňajú $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokážte:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}$$

Hinty:7

Úloha 8. Určite všetky n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kladných reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \dots + \frac{n^2}{x_n} &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

(Krajské kolo MO 1981/1982)

Hinty:8

Úloha 9. Nájdite všetky $n+1$ -tice $(n, k_1, k_2, \dots, k_n)$ prirodzených čísel, pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_n &= 5n - 4 \\ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} &= 1. \end{aligned}$$

Hinty:9

Úloha 10. Ukážte, že pre kladné reálne a, b, c spĺňajúce $a+b+c=1$ platí:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}$$

Hinty:10

Úloha 11. Pre kladné reálne a, b, c dokážte nerovnosť:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Hinty:11

Úloha 12. Pre nezáporné reálne a, b dokážte:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

(Celoštátne kolo MO 2014)

Hinty:12

Úloha 13. Nech a, b, c, d, e sú reálne čísla, ktoré vyhovujú rovniciam:

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= 8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 &= 16 \end{aligned}$$

Určite, akú najvyššiu hodnotu môže nadobúdať e . **Hinty:13**

Úloha 14. Ukážte, že pre $x, y, z \geq 1$ platí:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x(yz+1)}$$

(7. USAMO 1978)

Hinty:14

Hinty

1. Zvolíme vektory $\mathbf{u} = (a, b, c)$, $\mathbf{v} = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$.
2. Zvolíme vektory $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (x, y, z)$.
3. Zvolíme vektory $\mathbf{u} = (\frac{x^2}{y+z}, \frac{y^2}{x+z}, \frac{z^2}{y+x})$, $\mathbf{v} = (y+z, x+z, x+y)$.
4. To isté, ako v úlohe 3.
5. Rozšírime každý zlomok jednotkou v tvare $\frac{a}{a}$, atď.
6. 1 v čitateli si zapíšeme ako $a^2b^2c^2$, potom použijeme zlomkobijca a zakončíme AG nerovnosťou na $ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$.
7. Podmienku zo zadania upravíme do tvaru $\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1$, potom už iba použijeme odmocninobijca.
8. Správime súčin rovníc, CS nerovnosť nám dá $(\sum x_i)(\sum \frac{i^2}{x_i}) \geq (\frac{n(n+1)}{2})^2$, čiže musí nastať rovnosť. Ľahko sa ukáže, že n -tica $x_1 = \frac{x_2}{2} = \dots = \frac{x_n}{n}$, ktorá splňuje prvú rovnicu, splňuje aj druhú rovnicu pre všetky n .
9. Správime súčin rovníc, CS nerovnosť nám dá $n^2 - 5n + 4 \leq 0$. Z toho dostávame $n \leq 4$. Teraz nám už iba stačí preskúšať zopár možností.
10. Rozšír pomocou $\frac{a}{a}$ a stačí dokázať $1 \geq 27abc$. To platí z AG nerovnosti.
11. Zkus si roznásobiť $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.
12. V zadání sú zlomky aj odmocniny. Skús použiť zlomkobíjca aj odmocninový tvar naraz.
13. Odhadni vzťah medzi súčtami druhých a prvých mocnín u prvých štyroch premenných pomocou CS.
14. Dvakrát použi CS v tvare $\sqrt{((x-1)+1)(1+(y-1))} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$.

Literatúra a zdroje

1. <https://prase.cz/library/CauchySchwarzMR/CauchySchwarzMR.pdf>
2. <https://skmo.sk/dokumenty.php>.