

AG nerovnosť

Natália Čigašová

Zimná Alfa 2026

Pri riešení nerovností máme niekoľko spôsobov. Ukážeme si jednu najčastejšiu zbraň - **AG nerovnosť**. Najprv sa pozrieme na všeobecné tvrdenie, ktoré ho obsahuje.

Tvrdenie 1. Majme $n \in \mathbb{N}$ členov $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Majme ich kvadratický (K), aritmetický (A), geometrický (G) a harmonický (H) priemer. Platí:

$$K \geq A \geq G \geq H$$
$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} > 0$$

Všetky tieto nerovnosti sú samé o sebe užitočné, avšak najčastejšie používanou je nerovnosť v strede, spomínaná AG nerovnosť.

Všeobecným postupom je uhadnúť n a členy x_1 až x_n . V nasledujúcich príkladoch si môžeme všimnúť nejaké základné triky a na čo dávať pozor, aby naše hádanie bolo ľahšie.

Príklad 1. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$$

Všimnime si: Nejaké členy sa rovnajú, napríklad $x_1 = x_2 = a$. V predošlom namiesto toho aby sa na pravej strane objavili tri členy, dva sa schovávajú v jednom. ($2x = x + x$)

Príklad 2. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$$

Príklad 3. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$$

Príklad 4. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{z}{x} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z} \geq 2$$

Všimnime si: Nejaké členy majú časti, ktoré sa vykrátia, a preto sa neobjavujú na ľavej strane. (Napríklad $x_1 = \frac{1}{x}$, $x_2 = x$).

Príklad 5. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 15xyz$$

Príklad 6. $x_1, \dots, x_{2025} \in \mathbb{R}^+$. Nájdite hodnoty $x_1, \dots, x_{2025}$ ak platí:

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{1}{x_2} &\leq 2 \\x_2 + \frac{1}{x_3} &\leq 2 \\&\dots \\x_{2024} + \frac{1}{x_{2025}} &\leq 2 \\x_{2025} + \frac{1}{x_1} &\leq 2\end{aligned}$$

Príklad 7. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

Príklad 8. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy$$

Všimnime si: Niekedy nemusíme mať len jednu AG nerovnosť ale viac AG nerovností mohlo byť spojených dohromady. Niekedy však môžeme postupovať naopak, ak máme viac nerovností a spojíme ich, vieme z nich vytvoriť AG nerovnosť a teda aj niečo ďalšie z toho vyčítať.

Príklad 9. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq 3(a + b + c)$$

Príklad 10. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$$

Príklad 11. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{2}{3}(a + b + c) \geq \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1$$

Príklad 12. $n \in \mathbb{N}^+$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n^n}{n+1}$$

Príklad 13. $a, b, c \in \mathbb{R}^+, 0 \leq a \leq b \leq c$

$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geq 60abc$$

Príklad 14. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{z^2 + x^2}$$